

# 10. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita a metoda řezů

**D(Volnost):** Mějme soustavu lineárních nerovnic ( $S$ ) a v ní  $j$ -tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor  $x'$ .

Pak *volnost* (slack)  $j$ -té nerovnosti vůči řešení  $x'$  je  $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$ . Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí  $s_j^{(S)} \geq 0$ . Pokud by nerovnost byla  $\geq$ , definujeme volnost jako  $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$ , aby opět platilo  $s_j^{(S)} \geq 0$  pro přípustná řešení.

**T(Komplementarita):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (\text{P})$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \quad (\text{D})$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu  $(x^*, y^*)$ . Pak platí následující věta: Dvojice  $(x^*, y^*)$  je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \quad (1)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \quad (2)$$

**PŘÍKLAD PRVNÍ** Josef K. opsal od souseda při písence z Optimalizací přípustné řešení duálu a zadaní primálu. Primál je:

$$\begin{aligned} \max & 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Přípustným řešením duálu je:  $y = (4, 0, 0)$ . Úloha se však ptala na to, je-li řešení duálu optimem nebo ne. Dořešte úlohu za Josefa.

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Pepička K. opsala od souseda při písence z Optimalizací primál a optimální řešení duálu. Primálem je:

$$\begin{aligned} \min & 10x_1 - 4x_2 \\ & x_1 + 0.6x_3 + 4x_4 \geq 43 \\ & x_1 - x_2 + 0.6x_3 + 10x_4 \geq 27 \\ & x_1 - x_2 - 0.4x_3 - x_4 \geq 24 \\ & x_1 - x_2 - 0.4x_3 - 2x_4 \geq 22 \\ & x_1 + 3.6x_3 - 3x_4 \geq 56 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimálním řešením duálu je  $y = (3.36, 0, 0, 6.48, 0.16)$ . Úloha se však ptala na optimální řešení původního programu. Dořešte úlohu za Pepičku s použitím komplementarity.

PŘÍKLAD TŘETÍ  
takové, že platí

Pro LP a jeho duál z druhého příkladu nalezněte dvojici vektorů  $x$  a  $y$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \quad (1)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \quad (2)$$

ale  $x$  a  $y$  **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

**Tip:** Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

---

**Metoda řezů:** Mějme mnohostěn  $P = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ , kde  $A$  i  $b$  jsou racionální.

**D:** Necht' nerovnice  $\alpha^T x \leq \beta$  je platná nerovnice pro  $P$ . Pak nerovnici  $\lfloor \alpha^T \rfloor x \leq \lfloor \beta \rfloor$  nazýváme platný řez.

Platný řez splňuje každý celočíselný bod mnohostěnu  $P$ . Obecný platný řez dostaneme sečtením nerovnic definujících mnohostěn vynásobených nezápornými čísly a zaokrouhlením koeficientů a pravé strany. Přesněji platný řez lze získat jako  $\lfloor y^T A \rfloor x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ .

Následující věta říká, že přidáváním platných řezů dokážeme vytvořit jakoukoliv nerovnost platnou pro všechny celočíselné body  $P$ .

**T:** Necht'  $P = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  je racionální mnohostěn a necht'  $\alpha^T x \leq \beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n, \beta \in \mathbb{Z}$  je nerovnost, kterou splňují všechna  $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$ . Pak  $\alpha^T x \leq \beta$  lze odvodit postupným přidáváním platných řezů k  $P$ .

## Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

### OSMÝ DOMÁCÍ ÚKOL

[3 body]

Pro graf  $G = (V, E)$  uvažme relaxovaný lineární program pro perfektní párování:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e \\ \forall v \in V : \quad & \sum_{u \in V: uv \in E} x_{uv} = 1 \\ \forall uv \in E : \quad & x_{uv} \geq 0 \end{aligned}$$

1. Pro každé  $n \geq 3$  nalezněte souvislý graf na  $n$  vrcholech takový, že relaxovaný LP nemá přípustné řešení.
2. Dokažte, že pokud existuje  $E' \subseteq E$  taková, že každá komponenta  $(V, E')$  je buď lichá kružnice nebo hrana, potom relaxovaný LP má přípustné řešení.
3. Dokažte, že pokud existuje přípustné řešení, pak existuje přípustné polo-číselné řešení, tedy řešení, které má hodnoty proměnných 0, 1/2 a 1.