

## 7. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Úloha LP v rovnicovém tvaru:  $\max c^T x$  za podmínek  $Ax = b, x \geq 0$ .

**D:** *Báze* je množina indexů proměnných  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že  $A_B$  je regulární ( $A_B$  značí podmatici  $A$  indexovanou sloupci z  $B$ ).

*Bazické řešení*  $x$  odpovídající bázi  $B$  je řešení soustavy  $Ax = b$ , pro které platí:  $\forall i \notin B : x_i = 0$ .

*Přípustná báze* je taková, že odpovídající bazické řešení je přípustné, tedy  $x \geq 0$ .

Pivotovací pravidla (některá):

- největší koeficient – vstupní proměnná bude ta, která má v aktuální účelové funkci největší koeficient.
- největší přírůstek – zvolíme vstupní proměnnou, která povede k největšímu možnému přírůstku účelové funkce.
- nejstrmější hrana – vybereme vstupující proměnnou, jejímž zavedením do báze se průběžné bazické přípustné řešení posune ve směru, který svírá nejmenší úhel s vektorem  $c$ . Chceme tedy maximalizovat  $\frac{c^T \cdot (x' - x)}{\|c\| \cdot \|x' - x\|}$ , kde  $x$  je aktuální bazické přípustné řešení a  $x'$  je řešení, které bychom dostali vstupem uvažované zlepšující proměnné do báze.
- Blandovo pravidlo (nejmenší index) – vybereme vstupující proměnnou s nejmenším možným indexem.

**PŘÍKLAD PRVNÍ** Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP). Podařilo se vám ho najít do 3 kroků?

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_2 - x_4 \\ \text{př.} \quad & 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 5 \\ & -x_2 + x_3 = -2 \\ & -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Vyřešte simplexovou metodou:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ \text{př.} \quad & x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\ & x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Poté spočítejte stejnou úlohu pomocí pravidla “největší koeficient”.

**PŘÍKLAD TŘETÍ** Dokažte nebo vyvráťte: Mějme  $d$ -dimenzionální simplex  $S \subset \mathbb{R}^d$ . Existuje nadrovina  $h$  taková, že průnik ani jednoho jí indukovaného (uzavřeného) poloprostoru s  $S$  není simplex (libovolné dimenze)?

*Tip:* Zkuste si nakreslit malé simplex a odvodit to podle nich.

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Určete, kolik stěn dimenze  $k$  má  $d$ -dimenzionální simplex.

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste si nakreslit mnohostěn  $P$  a zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci  $\max 3x_1 + x_2$  na mnohostěnu  $P$ :

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- Optimalizujte funkci  $\max 4x + 5y + 3z$  na mnohostěnu  $P$ :

$$\begin{aligned}x + y + 2z &\geq 20 \\ 5x + 6y + 5z &\leq 50 \\ x + 3y + 5z &\leq 30 \\ x, y, z &\geq 0\end{aligned}$$