Příklady z Matematiky++

1. cvičení – Obecná topologie

8. 3. 2018

1. Ukažte, že následující prostory jsou homeomorfní:
   (a) $\mathbb{R}$, otevřený interval $(0, 1)$ a jednotková kružnice v rovině bez jednoho bodu,
   (b) kružnice a hranice jednotkového čtverce v rovině.
2. Ukažte, že pro zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definice spojitosti přes vzory otevřených množin ekvivalentní ε-δ definici.
3. Najděte příklad souvislého topologického prostoru, který není křivkově souvislý.
4. Najděte příklad křivkově souvislého topologického prostoru, který není obloukově souvislý.
5. Mějme množinu X a funkci $f\colon 2^X \to 2^X$ splňující následující podmínky:
   (a) $f(\emptyset) = \emptyset$,
   (b) $A \subseteq f(A)$,
   (c) $f(f(A)) = f(A)$ a
   (d) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$,

   kde A, B jsou libovolné podmnožiny X.

   Ukažte, že pomocí funkce f lze na X definovat (jednoznačně) topologii tak, že f je funkcí uzávěru, tj. každé množině přiřadí nejmenší uzavřenou nadmnožinu.
6. Mějme topologický prostor X takový, že vezmeme-li dva různé body $x, y \in X$, pak vždy existuje otevřená množina $U \subseteq X$, pro kterou $U \cap \{x, y\} = \{x\}$. Ukažte, že všechny jednobodové podmnožiny X jsou uzavřené.
7. Mějme topologické prostory X, Y, kde Y je Hausdorffův. Dále mějme spojitá zobrazení $f, g\colon X \to Y$. Ukažte, že množina $S = \{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.
8. Mějme topologický prostor X a nějakou jeho podmnožinu $A \subseteq X$. Kolik různých množin můžeme dostat opakovanou aplikací operací vnitřek a uzávěr na množinu A?
9. Vezměme nejmenší nespočetný ordinál ω_1 a uvažujme na něm topologii indukovanou ordinálním uspořádáním. Je tento prostor souvislý či křivkově souvislý? Je tento prostor separabilní? Má spočetnou bázi otevřených množin?

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1718.html`