Příklady z Matematiky++

2. série – Homotopie a Borsuk-Ulamova věta

nápověda po **12. 4. 2018**, odevzdat do **19. 4. 2018**

Uvažujeme pouze spojitá zobrazení, není-li uvedeno jinak.

Definice: Zobrazení $f\colon\ X \to Y$ je **nullhomotopické**, pokud je homotopické (nějakému) konstantnímu zobrazení $X \to Y$.

Definice: Prostor je **kontraktibilní**, pokud je homotopicky ekvivalentní jednobodovému prostoru.

Pozorovnání: Přímo z definice homotopické ekvivalence lze nahlédnout, že prostor je kontraktibilní právě tehdy, když identita je nullhomotopické zobrazení. Navíc je-li identita nullhomotopická, je prostor křivkově souvislý.

1. Ukažte, že prostory X (dvě kružnice spojené úsečkou) a Y (kružnice s příčkou) jsou homotopicky ekvivalentní. ($d(\cdot,\cdot)$ značí eukleidovskou metriku)

$$\begin{aligned} X &:= \big\{a \in \mathbb{R}^2 :\ d(a,(2,0)) = 1 \vee d(a,(-2,0)) = 1\big\} \\ &\quad \cup \big\{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le a \le 1\big\} \\ Y &:= \big\{a \in \mathbb{R}^2 :\ d(a,(0,0)) = 3\big\} \cup \big\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -3 \le y \le 3\big\} \end{aligned}$$

   V tomto případě stačí řešení nakreslit. **[3]**

2. Ukažte, že zobrazení $f, g\colon\ [0,1] \to X$ jsou homotopická právě tehdy, když jejich obrazy náleží do stejné křivkově souvislé komponenty X. **[2]**

3. Ukažte $\forall X \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdnou: X je konvexní $\Rightarrow$ X je kontraktibilní. **[2]**

4. Ukažte, že S^n není kontraktibilní pro žádné $n \in \mathbb{N}$. **[2]**

5. Dokažte, že neexistuje zobrazení $f\colon\ \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$ takové, že $f(x) = x$ pro všechny body na S^{n-1}. **[4]**

6. Mějme antipodální zobrazení $f\colon\ S^n \to S^n$. Použitím Borsuk-Ulamovy věty ukažte, že každé zobrazení $g\colon\ S^n \to S^n$ homotopické s f je na. **[6]**

7. Ukažte, že následující prostory jsou homeomorfní:

   (a) $\mathrm{S}S^n \cong S^{n+1}$ **[2]**

   (b) $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ **[4]**

8. **Na rozmyšlení:** Mějme prostor $X := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ s topologií podprostoru $\mathbb{R}$ a spočetný diskrétní prostor Y. Ukažte, že nejsou homotopicky ekvivalentní.

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1718.html`