Příklady z Matematiky++

1. cvičení – Harmonická analýza

7. 3. 2017

Fakt: $f(x) = \sum_\chi \widehat{f}(\chi)\chi(x)$

1. Ukažte, že je-li χ charakter grupy G, tak i $1/\chi = \bar{\chi}$ je charakter G.
2. Nechť G je konečná grupa. Mějme zobrazení $\chi\colon G \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ splňující $\chi(0) = 1$ a $\chi(a+b) = \chi(a)\chi(b)$ pro každé $a, b \in G$. Dokažte, že χ je charakter.
3. Ověřte, že na přednášce předvedené charaktery grup $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}_2^n$ jsou opravdu charaktery. Zjistěte, kolik z nich je navzájem různých.
4. Dokažte, že zobrazení $a \mapsto \chi_a$ je prostý grupový homomorfismus.
5. Najděte Fourierovu transformaci pro následující zobrazení $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{C}$:
   (a) $f_1(x) = 1$,
   (b) $f_2(x) = x_1$,
   (c) $f_3(x) = x_1 + x_2$,
   (d) $f_4(x) = \sum_i x_i \bmod 2$,
   (e) $f_5(x) = x_1 x_2$.
6. Najděte Fourierovu transformaci pro následující zobrazení $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$:
   (a) $g_1(x) = 1$,
   (b) $g_2(x) = \delta_0(x)$, kde $\delta_0(x) = 1$ pro $x = 0$ a 0 jinak,
   (c) $g_3 = (\delta_1 + \delta_{-1})/2$, kde obecně $\delta_i(x) = 1$ pro $x = i$ a 0 jinak,
   (d) $g_4 = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{iq}$, kde $n = pq$,
   (e) $g_5(x) = x$.
7. Buď G abelovská grupa, $f\colon G \to \mathbb{C}$ libovolné zobrazení. Pomocí znalosti $\widehat{f}$ zjistěte Fourierovu transformaci zobrazení:
   (a) $g(x) = f(-x)$,
   (b) $s_y(x) = f(x+y)$, kde $y \in G$ je konstanta,
   (c) $d_y(x) = f(xy)$, kde $y \in G$ je konstanta, $G = \mathbb{Z}_n$ a $\gcd(y, n) = 1$.
8. Buď χ charakter. Čemu se rovná $\widehat{\chi}$?
9. Pro nekonečné grupy přidáváme do definice charakterů ještě podmínku spojitosti. Zkuste vymyslet co nejvíce charakterů pro grupy $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$. V případě grupy $\mathbb{Z}$ je každé zobrazení spojité, u ostatních je spojitost definována tak, jak znáte z analýzy. [*]

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1617.html`