Příklady z Matematiky++

4. série – Polynomy

nápověda **23. 5. 2017**, odevzdat do **30. 6. 2017**

Definice: Nechť $\mathbb{T}$ je těleso a $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$. Definujeme *varietu*

$$V(f_1, \dots, f_k) := \bigcap_{i=1}^{k} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n \colon f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Definice: Mějme polynomy $f = \sum_{i=0}^{k} f_i x^i$ a $g = \sum_{j=0}^{l} g_j x^j$ jedné proměnné nad tělesem $\mathbb{T}$. *Resultant* $\mathrm{Res}(f, g, x)$ je determinant Sylvesterovy matice $(F_l|G_k)$, kde $F_l \in \mathbb{C}^{(l+k)\times l}$ a $(F_l)_{r,c} = f_{r-c}$, přičemž řádky i sloupce číslujeme od 0 a $f_i = 0$ pro i mimo interval $[0, k]$, analogicky pro G_k.

$$\begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & g_0 & 0 \\ f_1 & f_0 & 0 & g_1 & g_0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & g_2 & g_1 \\ 0 & f_2 & f_1 & g_3 & g_2 \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & g_3 \end{pmatrix}$$

Obrázek 1: Příklad Sylvesterovy matice pro $k = 2$ a $l = 3$

1. Je pravda, že polynom stupně d má nad okruhem nejvýše d kořenů? Zdůvodněte. **[1]**
2. Nechť $\mathbb{T}$ je těleso a $S \subset \mathbb{T}$ je konečná. Najděte polynom n proměnných stupně $d \le |S|$, jehož nulová množina v S^n obsahuje právě $d|S|^{n-1}$ bodů. **[1]**
3. Buď $\mathbb{F}$ konečné těleso.
   (a) Buď $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polynom, který může obsahovat pouze monomy $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ s $i_1, \dots, i_n < |\mathbb{F}| - 1$. Pak $\sum_{x \in \mathbb{F}^n} f(x) = 0$. **[2]**
   (b) Buď $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p$ pro prvočíslo p a mějme nenulové polynomy $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ takové, že $\deg(f_1) + \dots + \deg(f_k) < n$. Dokažte, že velikost $V(f_1, \dots, f_k)$ je dělitelná prvočíslem p. **[2]**
   (c) Buď $n \ge 1$ přirozené číslo a $f \in \mathbb{F}[x]$ polynom stupně n. Pak $f(\mathbb{F})$ je buď celé $\mathbb{F}$, nebo má velikost nejvýše $|\mathbb{F}| - \frac{|\mathbb{F}|-1}{n}$. **[3]**
4. Mějme ireducibilní polynomy $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$. Je pravda, že $V(f, g)$ je rovněž ireducibilní? **[1]**
5. Dokažte slabou Nullstellensatz pro $n = 1$. Přesněji, buď $\mathbb{T}$ algebraicky uzavřené těleso a mějme ideál $I \subseteq \mathbb{T}[x]$ takový, že $V(I) = \emptyset$. Ukažte, že $I = \mathbb{T}[x]$. **[2]**
6. Buď $\mathbb{T}$ těleso. Ukažte, že pokud polynomy $f, g \in \mathbb{T}[x]$ nemají společný nekonstantní faktor, pak existují polynomy $u, v \in \mathbb{T}[x]$, pro které $uf + vg = 1$. **[2]**
7. Buď $\mathbb{T}$ těleso. Dokažte, že pro každé $f, g \in \mathbb{T}[x]$, je-li $\mathrm{Res}(f, g, x) = 0$, pak polynomy f, g mají společný nekonstantní faktor. **[2]**

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1617.html`