Příklady z Matematiky++

5. série – Funkcionální analýza

nápověda individuálně mailem, odevzdat do **16. 2. 2016**

Všechny uvažované vektorové prostory (též lineární prostory) jsou nad tělesem $\mathbb{R}$.

Definice: (Topologickým) **duálem** normovaného lineárního prostoru E je prostor všech omezených lineárních zobrazení typu $E \to \mathbb{R}$ (funkcionálů) s normou

$$\|F\| := \sup\{|Fx| : \|x\|_E \leq 1\}$$

a značíme ho E^*.

Hahn-Banachova věta: Buď $f \in M^*$ spojitá lineární forma na podprostoru M normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje $F \in E^*$ tak, že $F = f$ na M a $\|F\|_E = \|f\|_M$.

Fréchet-Rieszova věta: Nechť je L spojitá lineární forma na Hilbertově prostoru H. Potom existuje právě jedno $a \in H$ takové, že $L(x) = \langle x, a\rangle\ \forall x \in H$. Navíc $\|L\| = \|a\|$.

1. Mějme lineární prostor V a $B \subseteq V$ jeho symetrickou konvexní podmnožinu takovou, že její průnik s každým podprostorem dimenze 1 (tj. množinou tvaru $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ pro pevné $x \neq 0$) je uzavřený interval konečné kladné délky. Definujme
$$\|x\|_B := \min\{k \geq 0 : x \in kB\}$$
Ukažte, že $\|.\|_B$ je norma na V, a také že každou normu na V lze definovat vhodnou množinou B. **[2*]**
Hint: Mějme $X \subseteq V$. Ukažte, že $(a+b)X = aX + bX\ \forall a, b \geq 0$ právě tehdy, když X je konvexní.

2. Ukažte, že v lineárním prostoru W se skalárním součinem platí **[2]**
$$\forall s \subseteq W : \overline{\langle s\rangle} = (s^{\perp})^{\perp}$$

3. Mějme X prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $[0,1]$. Ukažte, že žádné dvě normy $\|.\|_p$ pro $p \in [1,\infty]$ nejsou na tomto prostoru ekvivalentní. **[2]**

4. Rozhodněte, zda následující operátory na prostoru X jsou lineární a spojité. Pokud ano, spočtěte jejich normu ($\|L\| := \sup\{\|Lx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}$): **[4]**
   (a) $Lf(t) := f(t^3)$, $X = \mathcal{C}([0,1])$
   (b) $Lf(t) := f(t^3)$, $X = L^2([0,1])$
   (c) $L\,(x_n)_{i\in\mathbb{N}} := (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$, $X = l^1$
   (d) $L\,(x_n)_{i\in\mathbb{N}} := (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $X = l^1$

5. Dokažte následující geometrickou verzi Hahn-Banachovy věty: Buďte A a B neprázdné otevřené disjunktní konvexní podmnožiny normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje (nenulová) $f \in E^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $A \subset \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ a $B \subset \{x \in E : f(x) < \alpha\}$. **[2]**

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1516.html`