# Příklady z Matematiky++

3. série – Konvexní geometrie

nápověda po **5. 1. 2016**, odevzdat do **12. 1. 2016**

**Prékopa-Leindlerova nerovnost:** Buď $t \in (0,1)$ a $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ měřitelné, nezáporné, omezené a integrovatelné funkce. Pokud platí $h((1-t)x+ty) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$, pak platí:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \right)^{1-t} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g \right)^t$$

**Log-konkávnost:** Nezáporná funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je log-konkávní, pokud pro všechna $t \in (0,1)$ a $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} f(y)^t$$

**Hranová expanze:** Hranová expanze grafu $G = (V, E)$ je

$$\min \left\{ \frac{e(A, V \setminus A)}{|A|} : A \subseteq V, 1 \leq |A| \leq \tfrac{1}{2} |V| \right\}$$

kde $e(A, B)$ je počet hran mezi množinami vrcholů $A$ a $B$.

1. Dokažte Prékopa-Leindlerovu nerovnost pomocí Prékopa-Leindlerovy nerovnosti s dodatečnou podmínkou $\sup f = \sup g = 1$. Pečlivě ošetřete všechny okrajové případy. **[1]**

2. Ukažte, že pozitivní funkce $f(x)$ je log-konkávní právě tehdy, když je funkce $\log(f(x))$ konkávní. **[1]**

3. Ukažte, že log-konkávní funkce jsou uzavřené na součin a projekce. Projekce funkce $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ je funkce tvaru $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, \mathrm{d}y$, kde $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. **[2]**

4. Buď $\mathcal{G}$ (nekonečná) třída grafů, jejíž grafy mají stupeň nejvýše $d$ a hranovou expanzi alespoň $c_0 > 0$. Ukažte, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro všechny $G \in \mathcal{G}$ platí
$$1 - \frac{|A_t|}{|V(G)|} \leq e^{-ct}$$
pro každou $A \subseteq V(G)$ splňující $|A| \geq \frac{1}{2} |V(G)|$ a $t \geq 0$. $A_t$ je množina všech vrcholů ve vzdálenosti nejvýše $t$ od nějakého prvku $A$ (speciálně $A_t \supseteq A$). **[2]**

5. Buď $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexní množiny. Dokažte: **[2]**
$$\operatorname{conv}\left( (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B) \right) = \bigcup_{t \in [0,1]} \left( \{t\} \times ((1-t)A \oplus tB) \right)$$

---

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1516.html`