Příklady z Matematiky++

1. série – Míra a σ-algebry

nápověda po **24. 11. 2015**, odevzdat do **1. 12. 2015**

Definice: Buď $E \subset \mathbb{R}$ měřitelná. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme **hustotu** množiny E v bodě x jako limitu

$$d_E(x) := \lim_{\delta \to 0} \frac{\lambda((x-\delta, x+\delta) \cap E)}{2\delta}$$

pokud tato limita existuje.

1. Rozhodněte a zdůvodněte, zda existuje nekonečná σ-algebra, která má pouze spočetně mnoho prvků. **[2*]**

2. Mějme měřitelný prostor $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a posloupnost měřitelných množin $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ takovou, že $A_{i+1} \subseteq A_i$ pro každé i. Za předpokladu $\mu(A_0) < \infty$ dokažte:

   $$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

   Dále ukažte, že tento předpoklad je nutný (tedy najděte příklad, který nesplňuje předpoklad $\mu(A_0) < \infty$ a nesplňuje ani tvrzení). **[2]**

3. Dokažte, že následující množina C je měřitelná a spočtěte její (Lebesgueovu) míru: Uvažme posloupnost $\{\mathcal{K}_n\}$ konečných souborů intervalů definovaných následovně: $\mathcal{K}_0 = \{[0,1]\}, \mathcal{K}_1 = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$. V každém kroku konstruujeme $\mathcal{K}_n$ z $\mathcal{K}_{n-1}$ jako soubor uzavřených intervalů, jež jsou levými nebo pravými třetinami intervalů ze souboru $\mathcal{K}_{n-1}$ (prostřední třetiny vynecháváme). Označme K_n sjednocení souboru $\mathcal{K}_n$. Konečně, C definujeme jako $\bigcap_n K_n$. **[2]**

4. Ukažte, že každou měřitelnou množinu konečné míry lze libovolně přesně aproximovat konečným sjednocením intervalů – tj. $\forall E \subset \mathbb{R}$ konečné míry a $\forall \varepsilon > 0$ existuje $A \subset \mathbb{R}$, která je sjednocením konečně otevřených mnoha intervalů, taková, že $\lambda(E \triangle A) \leq \varepsilon$.

   Dále ukažte, že předpoklad konečné míry je nutný – tj. najděte měřitelnou množinu nekonečné míry, kterou nelze aproximovat konečným sjednocením intervalů pro nějaké $\varepsilon > 0$. **[2]**

5. Ukažte, že každou měřitelnou podmnožinu $\mathbb{R}$ konečné míry lze libovolně aproximovat zevnitř kompaktní (tj. uzavřenou a omezenou) množinou – tj. $\forall E \subset \mathbb{R}$ konečné míry a $\forall \varepsilon > 0$ existuje $K \subseteq E$ kompaktní taková, že $\mu(E \setminus K) \leq \varepsilon$. **[2]**

   Hint: Nejprve zkuste tvrzení dokázat za předpokladu, že E je omezená.

6. Dokažte, že neexistuje měřitelná množina $E \subseteq (0,1)$ taková, že $\lambda(E) = 1/2$ a pro každé $x \in (0,1)$ je hustota E v bodu x rovna $1/2$. **[2*]**
   Hint: V průběhu řešení nejspíše využijete aproximaci pomocí jednoho z předešlých příkladů.

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1516.html`