Příklady z Matematiky++

5. cvičení – Funkcionální analýza

13. 1. 2016

Všechny uvažované vektorové prostory (též lineární prostory) jsou nad tělesem $\mathbb{R}$.

Definice: Množina je **řídká**, pokud je doplněk jejího uzávěru hustý.

Definice: Uzavřená nadrovina v normovaném lineárním prostoru E je každá množina tvaru $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ pro $f \in E^*$, $f \neq 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. (Což je totéž jako posunutí maximálních uzavřených vlastních podprostorů.)

1. Ukažte, že každý podprostor konečné dimenze normovaného lineárního prostoru je uzavřený a uveďte protipříklad pro podprostor nekonečné dimenze.
2. Ukažte, že každý uzavřený vlastní podprostor normovaného lineárního prostoru je řídký.
3. Ukažte, že uzavřená jednotková koule v Hilbertově prostoru nekonečné dimenze není kompaktní.
4. Ukažte, že ortonormální báze Hilbertova prostoru nekonečné dimenze nemůže být jeho algebraickou (též Hamelovou) bází. Navíc ukažte, že algebraická báze je pro nekonečně dimenzionální Hilbertovy prostory vždy nespočetná.
5. Mějme lineární prostor s normou. Ukažte, že pokud norma vznikla ze skalárního součinu (definicí $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$), tak platí rovnoběžníkové pravidlo:
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$
Dále ukažte, že kdykoli platí rovnoběžníkové pravidlo, lze skalární součin získat z normy (a pokud norma vznikla ze skalárního součinu, získáme ten původní):
$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$
6. Dokažte Mazurovu větu: Nechť C je otevřená konvexní podmnožina lineárního prostoru E a $z \in E \setminus C$. Potom existuje uzavřená nadrovina $H \subset E$ tak, že $z \in H$ a $H \cap C = \emptyset$.
7. Mějme lineární operátor $L : X \to Y$. Ukažte, že pokud je L omezený na $B(0,1)$, tak je spojitý v 0.
8. Rozhodněte, zda následující funkcionály na Banachově prostoru X jsou lineární a spojité. Pokud ano, určete jejich normu.
   (a) $F : (x_n)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i^2}$, $X = c_0$
   (b) $F : f \mapsto \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$, $X = L^p([0,1])$
   (c) $F : f \mapsto \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$, $X = \mathcal{C}([0,1])$

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1516.html`