

Příklady z Matematiky++

3. cvičení – Minkowského suma a objem ve vysoké dimenzi

25. 11. 2015

Definice: Buď $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak jejich Minkowského suma je

$$A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

1. Určete Minkowského sumu (v \mathbb{R}^2) množiny $[0, 1] \times \{0\}$ a $\{(x, x) : x \in [0, 1]\}$.
2. Rozhodněte, zda Minkowského suma koulí je koule.
3. Rozhodněte, zda Minkowského suma elips (elipsou myslíme lineární transformaci koule, nikoli pouze její povrch) je elipsa.
4. Ukažte, že Minkowského suma konvexních množin je konvexní. Platí i opačná implikace?
5. Ukažte, že Minkowského suma kompaktních množin je kompaktní.
6. Ukažte, že pro každou $V \subset \mathbb{R}^n$ platí [*]

$$\text{conv}(V) \subseteq \bigcup_{v \in V} B\left(\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}\|v\|\right)$$

7. S pomocí předchozího cvičení ukažte, že konvexní obal k bodů obsažených v kouli B^n má objem nejvýše $\frac{k}{2^n} \lambda(B^n)$.