

# Cvičení z Diskrétní matematiky

## 5. cvičení – Funkce a uspořádání

30. 10. 2017

Vnoření uspořádání  $(A, \preceq_A)$  do  $(B, \preceq_B)$  je prostá funkce  $f: A \rightarrow B$  splňující:

$$\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \preceq_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \preceq_B f(a_2).$$

1. Jaké vlastnosti má zobrazení vzniklé složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí, či jejich kombinací?
2. Dokažte, že funkce  $f: X \rightarrow X$  na konečné množině je prostá právě tehdy, když je na. Platí to i pro nekonečnou množinu?
3. Buď  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow X$  splňující  $g \circ f = \text{id}_X$  a  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Dokažte, že  $f$  i  $g$  jsou bijekce.
4. Mějme zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definované  $f(x) = (x + 1)^2$ . Je toto zobrazení prosté? Je na? Co by se změnilo, pokud by místo  $\mathbb{R}$  bylo  $f$  definováno na  $\mathbb{C}$ ?
5. Najděte uspořádání, které má právě jeden minimální prvek, ale nemá nejmenší prvek.
6. Existuje nějaké lineární uspořádání na množině komplexních čísel?
7. Ukažte, že každé uspořádání  $(X, \preceq)$  lze vnořit do uspořádání  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ .

## Domácí úkol

(odevzdat do začátku cvičení 6. 11. 2017)

1. Uvažujme množinu  $\{1, \dots, n\}$  uspořádanou relací dělitelnosti. Kolik prvků má nejdelší řetězec a kolik největší antiřetězec? [2]
2. Ukažte, že každé konečné uspořádání lze vnořit do uspořádání  $(\mathbb{N}, |)$ . [bonus 2]

**Relace** Buď  $R \subseteq X \times X$  binární relace.

reflexivní	$\forall x \in X: xRx$
symetrická	$\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
antisymetrická	$\forall x, y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
tranzitivní	$\forall x, y, z \in X: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
ekvivalence	reflexivní, symetrická a tranzitivní
(částečné) uspořádání	reflexivní, antisymetrická a tranzitivní
lineární uspořádání	ČU a navíc $\forall x, y \in X: xRy \vee yRx$

**Zobrazení** Buď  $f: X \rightarrow Y$  zobrazení.

prosté (injektivní)	$\forall x, x' \in X: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
na (surjektivní)	$\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$
bijekce	prosté a na