Cvičení z Diskrétní matematiky

2. cvičení

9. 10. 2017

Není-li řečeno jinak, tak $n \in \mathbb{Z}^+$. Definujeme $F_0 = 0$.

1. Dokažte indukcí:
$$\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}$$
2. Ukažte, že každou šachovnici velikosti $2^n \times 2^n$, ve které chybí jedno políčko, lze vydláždit dlaždicemi tvaru „L“ pokrývajícími 3 políčka.
3. Dokažte, že každé přirozené číslo lze zapsat jako součet Fibonacciho čísel takový, že neobsahuje žádná dvě po sobě jsoucí Fibonacciho čísla. Formálně: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n = \sum_{i \in I} F_i$, kde $I \subset \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ a $i \in I \Rightarrow i + 1 \notin I$.
4. Dokažte indukcí:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$
5. Dokažte indukcí:
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$
6. Dokažte, že $(F_n)^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.
7. Dokažte, že $n^2 - 1$ je dělitelné 8 pro každé liché n.
8. Dokažte indukcí:
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,
   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$,
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Domácí úkol

(odevzdat do začátku cvičení 16. 10. 2017)

1. Dokažte indukcí, že $\forall n \geq 1$ platí F_{4n} je dělitelné 3. **[2]**

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/dm1718.html`