

Cvičení z Diskrétní matematiky

Bonusové domácí úkoly

1. Dostali jste minci, na níž padne hlava s pravděpodobností p a orel s $1 - p$. Chcete pomocí ní simulovat hod poctivou mincí, tedy vygenerovat náhodný bit, který bude 1 s pravděpodobností přesně $1/2$. Je tu však háček: p neznáte. [2]
2. Máte balíček 8 karet, dvě karty od každé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že v něm po pečlivém zamíchání nejsou žádné dvě karty stejné barvy těsně za sebou. [2]
3. Hodíme dvěma kostkami a výsledek přečteme jako dvojciferné číslo. Jaká je střední hodnota tohoto čísla? [1]
4. V předchozí úloze se falešný hráč pokusí švindlovat tak, že kostku s větší hodnotou použije jako první číslici. Jak se změní střední hodnota? [2]
5. Mějme 6-stěnné kostky, na jejichž stěnách jsou napsána nějaká přirozená čísla (obecně na každé kostce jiná). Řekneme, že kostka A poráží kostku B ($A \succ B$), pokud při hodu oběma padne s pravděpodobností větší než $1/2$ na A větší číslo než na B . Vymyslete trojici kostek X, Y a Z takovou, že $X \succ Y, Y \succ Z$ a $Z \succ X$. [2]
6. Rozhodněte, pro která n existuje graf na n vrcholech, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně. [1]
7. Dokažte, že pro každé n jsou všechny $(n - 2)$ -regulární grafy na n vrcholech isomorfní. [1]
8. Dokažte, že graf, v němž jsou stupně všech vrcholů sudé, neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent. [1]
9. Mějme strom, jehož každý vnitřní vrchol (tak říkáme těm, co nejsou listy) má stupeň aspoň 3. Dokažte, že vnitřních vrcholů je méně než listů. [2]
10. Rozhodněte, zda pro každé $k > 0$ existuje graf, který má právě k různých koster. [2]
11. Hamiltonovská kružnice je kružnice procházející všemi vrcholy grafu. Najděte dva souvislé grafy na alespoň 5 vrcholech se stejným skóre, z nichž jeden obsahuje Hamiltonovskou kružnici a druhý ne. [1]
12. Určete, jaký nejvyšší počet hran může obsahovat rovinný graf, který neobsahuje kružnice délky 3 a 4. [2]