3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Linearita, konvexita, afinita

Dva příklady ještě na formulace:

Příklad první Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol: *Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší. V tomto příkladu máte povoleno $2^{|V|}$ podmínek (ale není to potřeba).

Řešení. Přípustným řešením může být i množina disjunktních kružnic, které pokrývají všechny vrcholy. Pro správné řešení můžeme přidat např. podmínku $\sum_{uv \in E, u \in U, v \notin U} x_{uv} \geq 1$ pro každou vlastní podmnožinu vrcholů U.

Příklad druhý Mějme zadanou matici A a mnohostěn $Ax \leq 0, x \geq 0$. Vymyslete lineární program, pomocí kterého jde rozhodnout, jestli mnohostěn je triviální (obsahuje pouze bod 0) nebo ne.

Tip: Budou se asi opět hodit triky s epsilony.

Řešení. Libovolné jiné řešení bude mít alespoň jednu složku kladnou. Jak to otestovat? Stačí přidat podmínky $x_1 - \varepsilon_1 \geq 0, x_2 - \varepsilon_2 \geq 0, \ldots x_n - \varepsilon_n \geq 0$. Samo o sobě to nestačí, protože vektor ε by stále šlo nastavit na 0. Stačí ale do maximalizační funkce zvolit $\max \sum_i \varepsilon_i$ a pomocí existence nenulového řešení to již umím rozhodnout.

Příklad třetí Mějme mnohostěn (vlastně úsečku v 1D) $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \& x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Řešení. Z nerovnic uděláme rovnice, čili získáme systém

$$x - q_1 = 1,$$

$$x + q_2 = 2,$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, x \geq 0.$$

Nakreslit jej už není těžké.

Příklad čtvrtý *Křížový mnohostěn* definujeme jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$. Ve třech rozměrech mu říkáme *osmistěn.* Jednotkovou *krychli v n dimenzích* definujeme jako prostor $[-1, 1]^n$.

- Popište všechny nadroviny (nerovnice poloprostorů), které jsou potřeba k vyjádření osmistěnu a třírozměrné krychle.
- Kolik nadrovin je potřeba k popisu d-rozměrného křížového mnohostěnu?

Řešení. Pro krychli je nerovnic 6, většina tvaru $x \leq 1, x \geq -1$. Pro osmistěn potřebujeme rovnice typu $x+y-z \leq 1$, které určují poloroviny okolo počátku. Ve skutečnosti si můžeme představit řešení jako skalární součin $(1,1,-1) \cdot (x,y,z) \leq 1$. Rovnic potřebujeme 8, jednu pro každý třísložkový vektor znamének.

Obecně budeme potřebovat 2^d nadrovin, protože křížový mnohostěn má 2^d stěn dimenze $d-1$.

Příklad pátý Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ a b vektor z $\mathbb{R}^2$. Popište, jak může vypadat množina $\{x \in \mathbb{R}^3 | Ax = b\}$ geometricky.

Řešení. Máme vlastně sadu dvou rovnic o třech neznámých. Ty nemohou mít řešení jeden bod, protože neznámé jsou tři a rovnice jen dvě. Rovnice o třech neznámých v $\mathbb{R}^3$ popisují roviny, takže buď se roviny protnou a dostaneme jako řešení přímku, nebo jsou shodné a dostaneme jako řešení rovinu, nebo jsou rovnoběžné a dostaneme jako řešení prázdnou množinu.

Příklad šestý Jak může vypadat vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$?

Řešení. Dvě roviny mohou být buď rovnoběžné (ve stejném prostoru), mimoběžné (v různých prostorech), nebo se mohou protínat, a to buď jako celá rovina (identické), jako přímka (jsou ve stejném prostoru), nebo jako bod.

Je užitečné si uvědomit, že roviny v $\mathbb{R}^4$ jsou zadany dvěma rovnicemi. Příklad dvou rovin, co se protínají v bodě:

$R = \{(x,y,z,p) | x = 2, y = 3\}$ $Q = \{(x,y,z,p) | z = 4, p = 5\}$.

Příklad sedmý Nechť $W \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak W tvaru $W = U' + v'$ pro nějaký lineární prostor U' a nějaký vektor v'. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $W = U + v$ pro nějaký vektor v.

Charakterizujte všechny vektory v, které posunou lineární prostor U na afinní prostor W.

Řešení. První část: Kdyby existovaly takové dva různé prostory U_1 a U_2 a k nim vektory v_1, v_2 že $U_1 + v_1 = U_2 + v_2$, tak máme, že $U_1 = U_2 + v_2 - v_1$, ale dva lineární prostory nejde na sebe posunout žádným netriviálním způsobem – jinak totiž ztratíme nulový vektor. Posun tedy musel být jen triviální (o vektor, který ležel v U_1) a $U_1 = U_2$.

Druhá část: Nechť $W = U + u$. Nutně $u \in W$, protože $0 \in U$. Dokážeme teda, že pro každé $u, u' \in W$ je $W - u = W - u'$, což bude ekvivalentní tomu, že každý vektor z W je jedním z hledaných vektorů v, který posouvá U na W.

Nechť $x \in (W - u)$. Pak $x = (a - u)$. Jenže taky $u' \in W$, takže $(a - u + u')$ je afinní kombinace bodů z W a taky patří W. Takže $(a - u + u') - u' \in (W - u')$ a zjevně $((a - u + u') - u') = x$.

Třešnička pro rychlé počtáře:

Příklad osmý Mějme zadaný konvexní n-úhelník K v rovině (třeba jako množinu n polorovin). Nalezněte lineární program, který najde a spočítá maximální poloměr kružnice, kterou ještě lze vepsat do K.

Tip: Můžete předpokládat, že soustavu máte zadanou tak, že nejprve je zadáno d polorovin, které tvoří dolní obálku, a pak $n - d$ polorovin, které tvoří horní obálku (a d znáte).