# 3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Linearita, konvexita, afinita

*Dva příklady ještě na formulace:*

**Příklad první** Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

*Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu $uv$ máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je min $\sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol $u$ máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$."

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší. V tomto příkladu máte povoleno $2^{|V|}$ podmínek (ale není to potřeba).

**Příklad druhý** Mějme zadanou matici $A$ a mnohostěn $Ax \leq 0, x \geq 0$. Vymyslete lineární program, pomocí kterého jde rozhodnout, jestli mnohostěn je triviální (obsahuje pouze bod 0) nebo ne.

*Tip:* Budou se asi opět hodit triky s epsilony.

---

**Příklad třetí** Mějme mnohostěn (vlastně úsečku v 1D) $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \& x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

**Příklad čtvrtý** *Křížový mnohostěn* definujeme jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$. Ve třech rozměrech mu říkáme *osmistěn.* Jednotkovou *krychli v $n$ dimenzích* definujeme jako prostor $[-1, 1]^n$.

- Popište všechny nadroviny (nerovnice poloprostorů), které jsou potřeba k vyjádření osmistěnu a třírozměrné krychle.
- Kolik nadrovin je potřeba k popisu $d$-rozměrného křížového mnohostěnu?

**Příklad pátý** Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ a $b$ vektor z $\mathbb{R}^2$. Popište, jak může vypadat množina $\{x \in \mathbb{R}^3 | Ax = b\}$ geometricky.

**Příklad šestý** Jak může vypadat vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$?

**Příklad sedmý** Nechť $W \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak $W$ tvaru $W = U' + v'$ pro nějaký lineární prostor $U'$ a nějaký vektor $v'$. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $W = U + v$ pro nějaký vektor $v$.

Charakterizujte všechny vektory $v$, které posunou lineární prostor $U$ na afinní prostor $W$.

*Třešnička pro rychlé počtáře:*

**Příklad osmý** Mějme zadaný konvexní $n$-úhelník $K$ v rovině (třeba jako množinu $n$ polorovin). Nalezněte lineární program, který najde a spočítá maximální poloměr kružnice, kterou ještě lze vepsat do $K$.

*Tip:* Můžete předpokládat, že soustavu máte zadanou tak, že nejprve je zadáno $d$ polorovin, které tvoří dolní obálku, a pak $n - d$ polorovin, které tvoří horní obálku (a $d$ znáte).