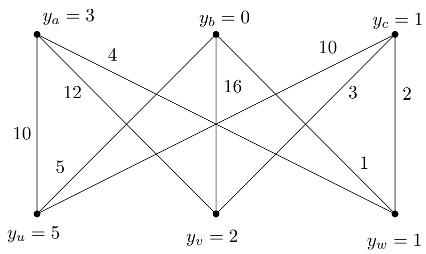
12. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Primál-duální algoritmy

Příklad první Zformulujte (nebo si připomeňte) lineární program na perfektní párování minimální ceny. Zformulujte i jeho duál. Připomeňte si také primál-duální algoritmus na tento problém z přednášky.

Příklad druhý Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané váhy a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Příklad třetí Zformulujte hledání minimální cesty z bodu s do bodu t v grafu ohodnoceném nezápornými délkami cest jako $\{0,1\}$-program. Můžete mít podmínku pro každý s,t-řez v grafu. Až najdete tento program, tak jej zdualizujte a zformulujte complementary slackness podmínky.

Příklad čtvrtý Uvažte následující algoritmus:

1. $\vec{y} = 0.$, kde y je vektor duálních proměnných.
2. $F = \emptyset$.
3. Dokud neexistuje s,t-cesta v F:
4. Uvažme souvislou komponentu C obsahující s.
5. Zvyšujte hodnotu y_C, dokud nějaká podmínka (odpovídající e) nebude těsná.
6. Přidejte e do F.

Dokažte, že tento algoritmus najde nejkratší cestu.

Mějme problém Set Cover: na vstupu dostaneme zadaných m podmnožin $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Pro každou podmnožinu máme také její nezápornou váhu w_j. Našim úkolem je vybrat množiny co nejmenší ceny takové, že jejich sjednocení je rovno celému $\{1,2,\ldots,n\}$.

Příklad pátý Zformulujte celočíselný program pro Set Cover, relaxujte ho a zformulujte duál.

Příklad šestý Nechť $f = \max_i |\{j : i \in S_j\}|$, neboli f je nejvyšší počet výskytů jednoho čísla v množinách $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Nalezněte primál-duální f-approximační algoritmus pro Set Cover.