

# 11. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita

**PŘÍKLAD PRVNÍ** Nechť  $A$  je totálně unimodulární matice. Dokažte následující:

- Dokažte, že  $A$  může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo  $-1$ .
- Ukažte, že  $A^T$ ,  $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$  a  $(A|I)$  jsou totálně unimodulární matice.

Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Nalezněte celočíselný mnohostěn  $x$ ;  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ , kde  $A$  je matice alespoň  $3 \times 3$  a  $A$  i  $b$  jsou celočíselné, ale  $A$  není totálně unimodulární. Může navíc  $A$  obsahovat pouze prvky  $-1$ ,  $0$  a  $1$ ? A co když zakážeme i  $-1$ ?

**PŘÍKLAD TŘETÍ** Mějme zadanou matici  $X$ . Ověřte, jestli matice  $X$  je totálně unimodulární, bez použití následujícího příkladu.

$$\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Mějme matici  $A$  velikosti  $m \times n$ , jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny  $B$  a  $C$ . Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ ,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci  $A$  stejné znaménko, tak jeden řádek patří do  $B$  a druhý do  $C$ .
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci  $A$  různé znaménko, tak oba řádky patří do  $B$  nebo zároveň do  $C$ .

Dokažte, že  $A$  je potom totálně unimodulární.

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

**PŘÍKLAD ŠESTÝ** Vezměme si jeden vektor (sloupec)  $v$  s hodnotami  $\{0, 1\}^n$ . Řekneme, že  $v$  je *intervalový*, pokud  $v$  má hodnoty 1 za sebou v právě jednom souvislém intervalu (třeba i délky 0). Matice  $M$  je *intervalová*, pokud všechny její sloupce jsou intervalové vektory.

Dokažte, že pro každou intervalovou matici  $M$  platí, že  $M$  je totálně unimodulární.