

10. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualizujeme grafové úlohy

PŘÍKLAD PRVNÍ Mějme úlohu lineárního programování $L: \max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$. Vytvořte úlohu LP E (s polynomiálním počtem proměnných i omezení vůči L) takovou, že libovolné přípustné řešení úlohy E jde snadno upravit na optimální řešení L .

Tímto dokážeme, že nalezení libovolného přípustného řešení je algoritmicky stejně těžké, jako nalezení optima. Ke konstrukci takového E se může hodit dualita.

PŘÍKLAD DRUHÝ Dualizujte problém hledání nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v na neorientovaném neohodnoceném grafu. Jakým grafové objekty hledá duál?

PŘÍKLAD TŘETÍ Nalezněte celočíselný $\{0, 1\}$ -program pro hledání barevnosti grafu. Můžete použít proměnné x_S za každou nezávislou množinu S v grafu G .

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Uvažte lineární relaxaci celočíselného programu z předchozího příkladu.

- Popište, co relaxace počítá (může se hodit její název *zlomkové obarvení*).
- Popište duál této lineární relaxace.
- Nalezněte nejmenší možné zlomkové obarvení pěticyklu (jak dokázat, že je nejmenší?).

PŘÍKLAD PÁTÝ Nalezněte vlastní celočíselný $\{0, 1\}$ -program pro hledání minimální kostry ohodnoceného grafu. Můžete mít proměnné pro každou podmnožinu hran nebo vrcholů.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Mějme následující program MK skoro hledající minimální kostru:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{e \in E} c_e x_e \\ & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \quad S \subseteq V \\ & x_e \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Program obsahuje chybu. Opravte program, aby opravdu hledal minimální kostru.
- Jakmile ho opravíte, relaxujte ho a nalezněte jeho duál.

Lemma. Nechť máme přípustné řešení x lineární relaxace programu MK (s opravou). Nechť podmínka $\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, S \subseteq V$ je splněna s rovností pro dvě množiny S_1, S_2 . Pak musí platit rovnost i pro množiny $S_1 \cap S_2, S_1 \cup S_2$.

PŘÍKLAD SEDMÝ Nyní dokážeme, že lineární relaxace má celočíselná optima. Vezměme si řešení x' , které je přípustné, ale ne celočíselné. Navrhněte postup, jak ho zlepšit. Můžete přitom použít lemma výše.