1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Opakování – matka moudrosti, sestra biflování

Optimalizační metody se zabývají studiem a aplikací lineárního programování. Než se do něj pustíme, bude se nám hodit oprášit znalosti z jiných předmětů, jako třeba:

Lineární algebra

Příklad první Vyřešte Gauss-Jordanovou eliminací následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= 0 \\ 2x + 4y + z + 2w &= 0 \\ x + 2y - 2z + w &= 0 \\ 5z &= 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic:

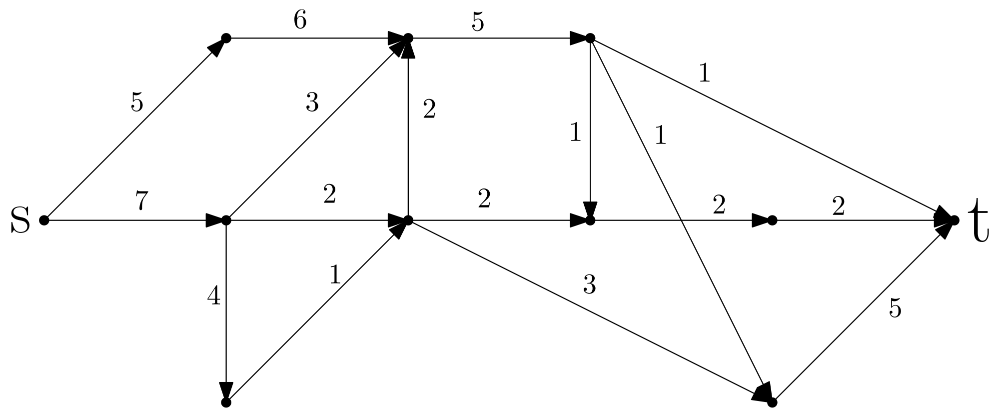
$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 2 \\ x + y + z &\leq 2 \\ x + 2y - z &\leq 10 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte speciálně ta řešení, která maximalizují proměnnou x, resp. y, resp. z.

Nápověda: Řešením grafickou metodou prostě myslíme „nakreslete množinu řešení určenou polorovinami na papír a rozhodněte, jestli je neprázdná (systém nemá řešení), jednobodová, omezená nebo neomezená.“

Algoritmy a datové struktury

Příklad třetí Nalezněte minimální s, t-řez pro následující ohodnocený orientovaný graf:



Příklad čtvrtý Mějme projekty $P_1, \ldots, P_k$. Za realizaci projektu P_i dostaneme odměnu r_i, ale potřebujeme k tomu množinu zdrojů S_i. Každý zdroj nás stojí náklady c_i, ale jakmile ho jednou koupíme, můžeme ho použít ve více projektech.

Navrhněte algoritmus, který pomocí toků v síti zjistí, které projekty realizovat a jaké zdroje si koupit, aby byl celkovy zisk co největší.

Kombinatorika a grafy

Příklad pátý Mějme ohodnocený bipartitní graf G_1 a neohodnocený libovolný graf G_2. Jakým algoritmem najdeme maximální vážené párování v G_1? A maximální nevážené v G_2?

Popište (nebo vymyslete) nějaký rozumný algoritmus na oba tyto problémy a jeho složitost (bez důkazů).

Doplňující otázka: A co ohodnocený libovolný graf?

Příklad šestý Jistě znáte, že duál k maximálnímu ohodnocenému s,t-toku je minimální ohodnocený s,t-řez. Navrhněte, co by mohlo být duálem pro problém nejkratší s,t-cesty v neohodnoceném nebo ohodnoceném grafu.

... a příklad navíc, kdybyste to už všechno znali:

Příklad sedmý Uvažujme problém Vertex Cover. Zde máme zadanou množinu hran E nad vrcholy $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ Našim cílem je najít minimální podmnožinu $X \subseteq V$ takovou, že pro každou hranu $e \in E$ platí $e \cap X \neq \emptyset$, čili X proniká všechny hrany.

- Nalezněte 2-aproximační algoritmus pro Vertex Cover.
- Uvažujme Weighted Vertex Cover, čili ten samý problém, jen vrcholy mají nyní nezápornou váhu a hledáme řešení X s nejmenší vahou. Nalezněte 2-aproximační algoritmus pro Weighted Vertex Cover.