9. CVIČENÍ Z DM

Algoritmické důkazy

Prohledávání do šířky a hloubky

PŘÍKLAD PRVNÍ Dokažte důležitou charakterizaci bipartitních grafů:

Graf G je bipartitní, právě když obsahuje lichou kružnici.

Tip: Aplikujte prohledávání do šířky z libovolného vrcholu. Obarvujte „jediným možným způsobem“. Ukažte, že když se obarvení povede, tak je graf bipartitní, a když ne, tak obsahuje lichou kružnici.

PŘÍKLAD DRUHÝ Graf, který obsahuje most, nemá žádnou jednoduchou charakterizaci a la bipartitní grafy. Zkuste ale vymyslet, jak prohledáváním do šířky umím pro zadanou hranu e rozhodnout, jestli e je mostem nebo není.

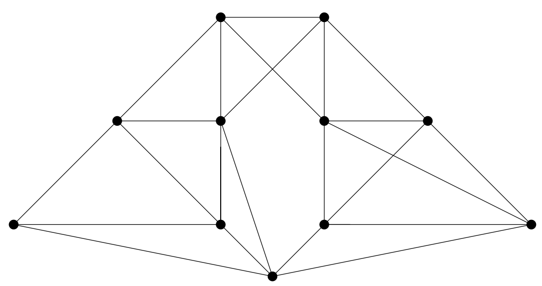
Tip: Opět se hodí „barvit“ vrcholy, tentokrát ale jinak.

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme strom na n vrcholech, který má všechny stupně rovny 3 nebo 1. Kolik má takovýto strom minimálně listů? A maximálně? Spočítejte a dokažte správnost výpočtu.

Hladový algoritmus

Užitečná definice: Řekneme o grafu, že je *k-obarvitelný*, pokud existuje funkce $c : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ taková, že každá hrana je dvoubarevná, čili $\forall uv \in E(G) : c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu G* je minimální k takové, že graf G je k-obarvitelný. Všimněte si, že 2-obarvitelný graf je bipartitní a naopak.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Nalezněte barevnost (minimální obarvení) grafu na obrázku:



PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte pomocí hladového algoritmu, že každý graf je $(\Delta+1)$-obarvitelný, kde Δ je jeho maximální stupeň.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Hladový algoritmus je silně závislý na tom, v jakém pořadí bere vrcholy. Nalezněte graf G a uspořádání vrcholu $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ takové, že zadaný graf je k-obarvitelný, ale hladový algoritmus, který bere a barví vrcholy podle tohoto uspořádání, graf obarví $k + n/4$ barvami.

PŘÍKLAD SEDMÝ [3B] Dokažte, že lehce upraveným prohledáváním do hloubky z jednoho vrcholu umím detekovat všechny mosty v grafu.

Tip: Pustím prohledávání do hloubky z nějakého vrcholu, který bude kořenem prohledávacího stromu. Nechť e je 3. třeba hrana od kořene v průchodu do hloubky. Pak aby e nebyla mostem, tak v nějaké chvíli musím přistoupit na hranu, která vede do vyšší než 3. vrstvy od kořene. Umíme tuto skutečnost napočítat pro všechny hrany zároveň během jednoho prohledávání?