Na tabuli: Mějme 16 písmen: `A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P`. Spočítejte počet jejich uspořádání, která splňují, že z nich **nejde** vyškrtáním získat ani jedno ze slov `PONK, DOBA, COP`.

PŘÍKLAD NULTÝ. Mějme šachovnici 4×4. Nechť R_i je jev: „kameny jsou na řádku i." Nechť S_j je jev: „4 kameny jsou na sloupci j".

Vytvořte jev „Na žádném řádku nejsou 4 kameny, ale na alespoň jednom sloupci jsou 4 kameny" pomocí R_j, S_j, $\cup$, $\cap$ a negací. Negace používejte jen u základních výroků – čili jen $(\neg R_j)$ nebo $(\neg S_j)$.

PŘÍKLAD PRVNÍ. Kolika způsoby lze umístit 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly 4 kameny ve stejném řádku nebo sloupci?

PŘÍKLAD DRUHÝ. Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušnici žádného národa netvořili souvislý blok? (Jednotliví občané stejného státu nejsou rozlišitelní.)

Tip: Kolik existuje uspořádání 5 Čechů, 4 Maďarů a 3 Rusů celkem? No, normálně by jich bylo $(5+4+3)!$, kdyby všichni byli rozlišitelní. Lidé uvnitř národa ale rozlišitelní nejsou, asi to budeme muset něčím podělit ...

PŘÍKLAD TŘETÍ Začněme počítat Eratosthenovo síto na hledání prvočísel. To funguje tak, že si napíšu tabulku čísel od 1 třeba do 100, vyškrtnu jedničku, pak najdu nejnižší nevyškrtlé číslo (dvojka), prohlásím ho za prvočíslo a z tabulky vyškrtám všechny jeho násobky. Pak vezmu další nejmenší nevyškrtlé číslo (trojka), a provedu to samé. Takhle najdu v tabulce všechna prvočísla.

Otázka zní: Kolik čísel (vlastně kandidátů na prvočísla) mi zbude, pokud skončím proces u sedmičky? Čili jsem právě vyškrtal všechny násobky 2,3,5 a 7.

Připomínka: Konečná funkce $f : X \to Y$ je surjektivní, pokud pro každý prvek $y \in Y$ existuje (alespoň jeden) prvek $x \in X$ tak, že $f(x) = y$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Nyní už budeme počítat klasickou, tvrdou verzi principu inkluze a exkluze. Navrhněte vzorec, který spočítá počet surjektivních funkcí. Klasický postup: vymyslete jevy, kterými by se to dalo spočítat pomocí sjednocení, a pak spočítejte jejich průniky.

Připomínka: Stirlingovo číslo $\left\{ n \atop k \right\}$ počítá počet rozkladů množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ do k množin.

PŘÍKLAD PÁTÝ Navrhněte vzorec, který počítá Stirlingova čísla pomocí principu inkluze a exkluze. Klasický postup: jevy, atd. Ověřte na výsledku z předchozího případu, že výsledek byl správný.

Následující příklady počítají s *Eulerovou funkcí* – to je funkce $\varphi(n)$, která pro n spočítá počet všech čísel a od 1 do n, ktera jsou nesoudělna s číslem n. Tzn. $NSD(a, n) = 1$.

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Kolik vyjde $\varphi(n)$, pokud n je prvočíslo? A kolik, je-li to mocnina prvočísla?

PŘÍKLAD SEDMÝ. Mějme p_1, p_2 prvočísla. Kolik je čísel od 1 do n, která dělí jak prvočíslo p_1, tak p_2? A dá se tento počet vyjádřit pro m různých prvočísel?

PŘÍKLAD OSMÝ. Nechť n je číslo ve tvaru $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$. Navrhněte výpočet $\varphi(n)$ pomocí principu inkluze a exkluze. (Je tedy třeba nastavit množiny A_i. Předchozí cvičení napovídá, co by mohly být průniky.)

PŘÍKLAD 9 [2B] Dopočítejte přesný vzorec pro Eulerovu funkci. Použijte prvočíselný rozklad čísla n.