2. CVIČENÍ Z DM

$n \to n+1$

Úloha první

Dokažte matematickou indukcí:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Úloha druhá

Dokažte:

Pro každou neprázdnou konečnou množinu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ platí, že počet podmnožin X liché velikosti se rovná počtu podmnožin X sudé velikosti.

Úloha třetí

Dokažte:

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Úloha čtvrtá

Určete a dokažte počet různých rozložení (nerozlišitelných) kostek (2×1) do šachovnice $n \times 2$.

Tip: Určete hodnotu pro malá n, podle toho tipněte výsledek, nakonec dokažte indukcí.

Úloha pátá

Dokažte vzorec:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Tip: $\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Můžeme rovnost dokázat indukcí například tak, že z každé $k-1$-prvkové podmnožiny $n-1$-prvkové množiny „vyrobíme“ jednu k-prvkovou, a stejně tak z každé k-prvkové podmnožiny $n-1$-prvkové množiny. Pokud takhle vyrobíme všechny k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny, rovnost platí.

Úloha šestá [2b]

Spočítejte počet průchodů šachovnici $n \times 3$ takových, že začneme na políčku $(1, 1)$, skončíme na políčku $(n, 3)$ a každé pole projdeme právě jednou.