

1. CVIČENÍ Z DM

Hádanky, úložky a logika

Jako obvykle u úvodních cvičení platí: Přeskočte, pokud znáte.

ÚLOHA PRVNÍ

Dokažte platnost de Morganova pravidla, pro a, b logické proměnné: $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a) \wedge (\neg b)$.

ÚLOHA DRUHÁ

Dokažte platnost jiné podoby de Morganova pravidla: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Zde jsou A, B libovolné podmnožiny X a \overline{A} doplněk množiny A v X , čili $X \setminus A$. Dá se to snadno ukázat Vennovým diagramem, ale místo toho to zkuste odvodit z předchozího příkladu s pomocí výroků tvaru $x \in A$.

ÚLOHA TŘETÍ

Úpravami výroků dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

$$\neg(\neg b \wedge \neg c) \wedge \neg((\neg a \vee b) \wedge c)$$

$$(a \vee \neg c) \wedge (c \Leftrightarrow \neg b).$$

ÚLOHA ČTVRTÁ

Alois a Barča mají čokoládu o velikosti $m \times n$ dílků. Alois jí rozlomí na dva kusy podle nějakého vodorovného nebo svislého zlomu. Pak si Barča vybere jeden z těchto kusů a ten opět zlomí. Hra pokračuje, dokud čokoláda není rozlámaná na dílky 1×1 . Dokažte, že hra trvá vždy stejně dlouho, nehlédě na to, jak hráči lámou. (Jak dlouho to bude?)

ÚLOHA PÁTÁ

Mějme mřížku (šachovnici) 6×6 , kde je vykousnutý levý horní roh. Jde ji pokrýt dominovými kostkami, tedy kostkami 2×1 ? Samozřejmě že ne, $36 - 1$ je liché číslo. Dobrá, vykousneme tedy ještě pravý dolní roh. Jde to nyní? Rozhodněte.

ÚLOHA ŠESTÁ

Mějme mřížku (šachovnici) o velikosti $2^n \times 2^n$. Vaším cílem bude pokrýt tuto mřížku políčky tvaru L, tedy čtverci 2×2 , kde jedno políčko chybí.

Aby to nebylo tak snadné (nebo tak nemožné), jedno políčko na šachovnici je už dopředu vyloupenuto a chybí. Ukažte, že je ji nyní možné pokrýt, nezávisle na tom, které políčko je vyloupenuto.

ÚLOHA SEDMÁ [1B]

Vennovy diagramy jsou super, tedy pro dvě množiny A a B . Dokážete nakreslit Vennův diagram pro tři množiny pomocí tří kružnic? Dokážete nakreslit Vennův diagram pro čtyři množiny pomocí čtyř kružnic?

ÚLOHA OSMÁ [2B]

Mějme v rovině rozmístěných n zetek. Zetko jsou dvě polopřímky s krajními body spojenými úsečkou. Kolik je maximální počet oblastí, které n zetek může určovat? Pro $n = 1$ je to 2, pro $n = 2$ je to 12 ...