6. DÚ Z DISKRÉTKY

Lehké grafové

Příklad první – [2b]

- Dokažte, že strom obsahuje právě $|V| - 1$ hran.
- Pokud bychom měli graf, který je bez kružnic, ale není souvislý – obsahuje právě k komponent souvislosti (souvislých částí) – kolik přesně hran obsahuje takovýto graf? (Takový graf se nazývá *les* a jistě vymyslíte, proč.)

Příklad druhý – [2b]

Dokažte, že každý souvislý graf obsahuje (nějaký) strom jako svůj podgraf.

Příklad třetí – [2b]

Už víte, že aby graf byl nakreslitelný jedním tahem (a skončili jsme tam, kde jsme začali), musí mít všechny stupně sudé. Představme si, že nyní řešíme stejný problém pro *orientované grafy* – to jsou takové, kde každá hrana má také směr, a když hranou chci projít, tak mohu jen v jejím směru. Vymyslete, jaká je dobrá postačující podmínka na to, aby orientovaný graf šel nakreslit jedním tahem.

Třeba určitě musí mit takový graf zase všechny stupně sudé, ale to není vše – třeba vrchol se čtyřmi hranami do něj vstupujícími a žádnou hranou vedoucí ven zřejmě bude blokovat nakreslení, i když má sudý stupeň.

Nemusíte dokazovat, že podmínka je i nutná.

Priklad čtvrtý – [2b]

Nechť G je souvislý graf s minimálním stupněm δ. Dokažte, že pak graf G obsahuje cestu na alespoň $\delta + 1$ vrcholech.

Nápověda: vezměte nejdelší možnou cestu. Její koncový vrchol má stupeň δ. Můžeme něco říci o jeho sousedech?