2. DÚ Z DISKRÉTKY

Počítání objektů

Příklad první – [2b]

Spočítejte sumu:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}.$$

Nápověda: Pokud nevíte, jak na ni, můžete zkusit vypočítat první hodnoty, tipnout si výsledek a dokázat jej indukcí.

Příklad druhý – [2b]

Čemu se rovná Stirlingovo číslo $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$? Zdůvodněte.

Nápověda: Nejlepší způsob je rozmyslet si, co to znamená, když rozdělujete n-prvkovou množinu na $n-1$ neprázdných množin.

Příklad třetí – [4b]

Pokud jste jej nestihli na cvičení: ekvivalenční třídy a počet ekvivalencí.

Abychom spočetli počet ekvivalencí, musíme trochu více prohlédnout do toho, jak se ekvivalence vlastně chovají.

- Nejprve ukažte, že jsou-li dva prvky x, y v ekvivalenci, tak všechny prvky v relaci s x jsou i v relaci s y a naopak. Zároveň s tím ukažte, že všechny prvky, které nejsou v relaci s x, nejsou v relaci s y ani naopak.
- Předchozí tvrzení nám říká, že ekvivalence rozdělí prvky na disjunktní skupiny, kde všechny prvky uvnitř skupiny jsou v relaci a žádné prvky mimo skupinu v relaci nejsou. Těmto skupinám se říká *třídy ekvivalence*.
- Nyní víte, že ekvivalence je přesně určená svými třídami ekvivalence (jednak počtem samotných tříd a jednak tím, které prvky jsou spolu ve třídě). Využijte toho a vyjádřete počet ekvivalencí na n-prvkové množině jako sumu nebo součin. Můžete přitom využít už známých hodnot (Fibonacciho čísel, kombinačních čísel, Stirlingových čísel...)