2. PÍSEMKA Z DISKRÉTKY

s nápovědami

Na vypracování máte 90 minut. Nezapomeňte se podepsat. Můžete použít všechny tištěné materiály a kalkulačky, ale ne jiná elektronická zařízení (ani ta, co obsahují aplikaci kalkulačka). Výsledek by měl mít co nejjednodušší formu, co zvládnete vyjádřit. Můžete používat známé matematické zkratky (š(n), $\binom{n}{k}$, $\left\{ {n \atop k} \right\}$, F_i i další.)

PŘÍKLAD PRVNÍ [5B]. Spočítejte sumu:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k.$$

Nápověda: Použijeme trojúhelníkovou metodu, neboť už známe $\sum k2^k$ a $\sum 2^k$.

PŘÍKLAD DRUHÝ [5B]. Dokažte, že pokud graf je souvislý, tak obsahuje alespoň $|V| - 1$ hran.

Nápověda: Vyvarujte se vět stylu „nejjednodušší graf je strom“ nebo „nejjednodušší strom je cesta“, toto totiž nikde není řečeno a není ani jasné, jak by se jednoduchost definovala (například indkucí se totiž k cestě nedopracujete, většinou se dopracujete k jednovrcholovému grafu).

Například se dá začít „vezměme $|V| - 1$ cest z vrcholu v do ostatních vrcholů“ a rozmyslet, kolik rozdílných hran tam určitě v sjednocení těchto cest musí být. Případně můžete tvrdit, že každý souvislý graf je buď strom nebo strom a nějaké extra hrany, a po odebrání extra hran (po jedné) se doberu ke stromu, který (každý) má $|V| - 1$ hran.

PŘÍKLAD TŘETÍ [5B]. Kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které jsou zároveň involuce? Slovem *involuce* je chápána taková permutace, která je sama sobě inverzí, čili $p \circ p = \mathrm{id}$.

Nápověda: V involuci mohou být cykly délky 1 nebo 2, zbývá napočítat, kolik možných rozdělení na cykly délky 1 nebo 2 je.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ [5B]. Nechť n je přirozené číslo, které není dělitelné žádnou druhou mocninou přirozeného čísla. Určete maximální možnou velikost množiny dělitelů čísla n, které se navzájem nedělí.

Čili se ptáme na $\max |M|$, kde $M = \{x : x|n \ \& \ \forall y \in M, y \neq x : \neg(x|y)\}$.

Nápověda: Není uspořádání dělitelností na množině dělitelů n hodně podobné uspořádání inkluzí? Jaký je největší antiřetězec tam?

PŘÍKLAD PÁTÝ [5B]. Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

Pokud pro (konečné nebo nekonečné) částečné uspořádání P platí, že $\alpha(P)$ je konečné a $\omega(P)$ je konečné, pak P samotné je také konečné.

Pokud se v tomto příkladu budete odkazovat na větu z přednášky nebo knížky, uveďte raději její plné znění. Vyvarujete se tak toho, že použijete větu jinak, než jak je ve skutečnosti napsána.

Nápověda: Úloha na úpravu důkazu z přednášky. Nemůžete použít přímo větu o dlouhém a širokém, protože ta začíná slovy „Mějme konečné částečné uspořádání P“, a to tady prostě nemáte – to musíte odvodit.

Můžete však dokázat, že věta platí pro každé uspořádání, které má jak α tak ω konečné, a to je pravda. Nebo se podíváte na Hasseho diagram P a usoudíte, že je konečný.

PŘÍKLAD ŠESTÝ [5B]. Dokažte, že když přidáme libovolnou další hranu do stromu T (na alespoň 3 vrcholech), budeme mít v nově vzniklém grafu $T \cup \{e\}$ **právě jednu** kružnici jako podgraf.

Nápověda: Mezi dvěma vrcholy této hrany je právě jedna cesta, po přidání hrany se tedy musí vytvořit právě jedna kružnice. Pozor na slovo *právě*, nezapomeňte se o tom zmínit, jinak můžete

dokázat existenci alespoň jedné kružnice.

PŘÍKLAD B [10B]. Spočítejte počet permutací s n čísly, které mají jedničku i dvojku ve stejném cyklu.

Nápověda: Použijeme indukci nebo argument s „trikovým“ zápisem permutace (viz cvičení na permutace).