9. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Aplikace částečných uspořádání

Za 14 dnů bude písemka.

PŘÍKLAD PRVNÍ. Najděte posloupnost reálných čísel délky 17, která neobsahuje monotónní posloupnost délky 5.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Dokažte úpravu Erdös-Szekerésova lemmatu:

Každá posloupnost reálných čísel délky $kl + 1$ obsahuje rostoucí podposloupnost délky $k + 1$ nebo nerostoucí podposloupnost délky $l + 1$.

Připomenu, že *rostoucí* je taková posloupnost, která v každém svém kroku ostře vzroste, a *nerostoucí* je taková posloupnost, která v žádném svém kroku nevzroste (ale může stát nebo klesat).

PŘÍKLAD TŘETÍ. Dokažte, že lepší zesílení už nemůžeme získat, a to konkrétně takto:

Pro každé k a l existuje uspořádaná množina P taková, že má kl prvků a platí $\alpha(P) = k, \omega(P) = l$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Mějme uspořádání 2^X pomocí inkluze a v něm řetězec Ř. Řekneme, že Ř je *symetrický* řetězec, pokud mu na doplnění do maximálního řetězce chybí stejně prvků odzdola, jako odshora.

Jinak řečeno, existuje k, že Ř obsahuje podmnožiny jen velikostí $k, k + 1, k + 2 \ldots n - k$.

Rozhodněte (důkazem):

- Kolik disjunktních symetrických řetězců se nejvýše vejde do 2^X?
- Pokud budu vědět, že umím do 2^X vložit k disjunktních symetrických řetězců, mohu k nějak použít na (horní nebo dolní) odhad největšího antiřetězce v 2^X?

PŘÍKLAD PÁTÝ. Zdánlivě odjinud. Mějme systém všech možných (i nesprávných) uzávorkování s n závorkami. (Asi víte, kolik jich bude.) Začněme v každém uzávorkování hledat *správné částečné uzávorkování*. To budeme dělat tak, že nejdřív prohlásíme za spárované všechny správně uzávorkované dvojice `()`, dále už si jich nevšímáme, a pokračujeme induktivně dál.

Tímto způsobem dostaneme nějaké správně uzávorkované úseky a zbytek nespárovaných závorek. Řekněme, že uzávorkování a je v relaci s uzávorkováním b, pokud mají úplně shodné správně uzávorkované úseky. (To znamená, že mají na stejných pozicích stejné závorky – alespoň co se správně uzávorkovaných úseků týče).

- Dokažte, že takto zadefinovaná relace je ekvivalence.
- Řekněme že pro uzávorkování c je přesně z závorek je správně uzávorkovaných. Můžete potom něco prohlásit o velikosti třídy ekvilalence, ve které je c?

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Dokažte, že zobrazení z 2^X do U (systému všech uzávorkování, viz výše) popsané níže je bijekce:

„pokud $c \in A$, pak na c-té pozici bude závorka `(` a pokud ne, pak tam bude závorka `)`“

PŘÍKLAD SEDMÝ. Ukažte, že každá třída ekvivalence na uzávorkováních (viz příklad pátý) odpovídá jednomu symetrickému řetězci (viz příklad čtvrtý).

PŘÍKLAD OSMÝ – [3B]. Nakonec dokažte, že z příkladu sedmého máme rozklad 2^X na disjunktní symetrické řetězce (a každá množina je pokrytá nějakým řetězcem) a z toho že plyne Spernerova věta.

Tři body jsou za cvičení $4 - 8$.