Za 7 dní písemka. (Indukce, konečné relace, kombinační čísla, kombinatorické počítání, PIE + dnešní látka).

Ve všech následujících příkladech se mohou objevit nekonečně velké objekty (množiny, relace, etc.), není-li řečeno jinak.

PŘÍKLAD PRVNÍ. Nakreslete relaci $R = \{(a,b),(a,e),(a,d),(b,d),(d,e),(b,e)\}$ všemi způsoby. Ve kterých je dobře vidět, je-li reflexivní, symetrická? A ve kterých je vidět, že je tranzitivní?

PŘÍKLAD DRUHÝ. Pro rozklad množiny X na $X_1,\dots,X_n$ můžeme definovat relaci $R = \{(x,y) \in X^2 : \exists i : x,y \in X_i\}$ neboli: x a y jsou ve stejné třídě rozkladu. Dokažte, že tato relace je ekvivalencí.

PŘÍKLAD TŘETÍ. Popište, jak vypadá v maticovém zápisu libovolná tranzitivní relace a také jak v něm vypadá ekvivalence.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Dokažte, že pro systém podmnožin množiny X (2^X) platí, že relace $ARB \equiv A \subseteq B$ je uspořádání. Nakreslete ji pro $|X| = 4$ Hasseovým diagramem.

PŘÍKLAD PÁTÝ. Uspořádání, jako každou relaci, jde skládat. Je složení dvou uspořádání zase uspořádání? Je složení dvou lineárních uspořádání lineární?

Složení dvou stejných relací $R \circ R \circ R$ budeme značit R^3, podobně pro vyšší složení.

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Nechť R je uspořádání. Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem, že platí, že pro každé uspořádání R existuje přirozené číslo k tak, že složení R^k už se rovná některému R^i pro $i < k$.

PŘÍKLAD SEDMÝ. Zapište permutaci $(4,2,3,6,7,1,5)$ všemi způsoby.

PŘÍKLAD OSMÝ. O operacích nad permutacemi. Předpokládejme, že permutace níže jsou všechny z množiny čísel od 1 do n.

- Existuje permutace s, že $p \circ s = p$?
- Existuje pro každé p permutace q, že $p \circ q$ je identita?
- Je skládání permutací asociativní?
- Popište všechny permutace p, pro které $p \circ p = p$.

PŘÍKLAD DEVÁTÝ [3B] Kromě „zápisu funkcí“, „zápisu čísly“ a „zápisu cykly“ existuje taky „zápis trikem“. Jeho výhodou je, že je mocnější, než některé jiné zápisy, a dobře se s ním pracuje.

Zápis trikem budeme dělat tak, že si znovu rozepíšeme permutaci na cykly (se závorkami), ale zapíšeme cykly tak, aby prvky šly za sebou a poslední v cyklu bylo to nejmenší číslo. Pak setřídíme cykly podle posledních, nejmenších čísel vzestupně. Nakonec smažeme závorky.

Pokud naše původní cykly byly tedy $(1,3,2)$, $(4,7)$, (5), (6), zapíšeme permutaci jako $(3,2,1)$, $(7,4)$, (5), (6) a nakonec odstraníme závorky, tedy dostaneme $3,2,1,7,4,5,6$.

- [1.5b] Dokažte, že z takhle vzniklého zápisu dokážu jednoznačně rekonstruovat původní permutaci.
- [1.5b] Pak navíc ukažte, že vezmu-li si libovolné rozmístění čísel od 1 do n, tak každé takové rozmístění jde přečíst trikovým zápisem a nestane se nikde chyba.

Tedy trikový zápis je jednoznačný zápis permutace a navíc jde zapsat jen pomocí řady čísel (tedy pravděpodobnost, že 1 bude na prvním místě trikového zápisu, je prostě $1/n$). Co se s ním lépe počítá, uvidíme příště.