5. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

PIE a šatnářka

Za 14 dní písemka. (Indukce, konečné relace, kombinační čísla, kombinatorické počítání, PIE).

PŘÍKLAD MÍNUS PRVNÍ. Na tabuli: Máme 5 vodníků a 7 čarodějnic. Kolika způsoby mohu postavit vodníky a čarodějnice do řady tak, aby dva vodníci nestáli nikdy vedle sebe?

PŘÍKLAD NULTÝ. Na tabuli: Dokažte, že pro $\check{s}(n)$ (počet způsobů vyřešení šatnářky) platí rekurence $\check{s}(n) = (n-1)(\check{s}(n-1) + \check{s}(n-2))$.

PŘÍKLAD PRVNÍ. Kolika způsoby lze umístit 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly 4 kameny ve stejném řádku nebo sloupci?

PŘÍKLAD DRUHÝ. Mohu pomocí inkluze a exkluze spočítat velikost průniku $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$?

PŘÍKLAD TŘETÍ. Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušnici žádného národa netvořili souvislý blok?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Určete počet permutací s:

- právě jedním pevným bodem
- právě k pevnými body.

PŘÍKLAD PÁTÝ. Kolik existuje permutací čísel $1, 2, \ldots, 10$, kde se žádné sudé číslo nezobrazí na sebe?

Následující příklady počítají s *Eulerovou funkcí* – to je funkce $\varphi(n)$, která pro n spočítá počet všech čísel a od 1 do n, ktera jsou nesoudělna s číslem n. Tzn. $NSD(a, n) = 1$.

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Kolik vyjde $\varphi(n)$, pokud n je prvočíslo? A kolik, je-li to mocnina prvočísla?

PŘÍKLAD SEDMÝ. Mějme p_1, p_2 prvočísla. Kolik je čísel od 1 do n, která dělí jak prvočíslo p_1, tak p_2? A dá se tento počet vyjádřit pro m různých prvočísel?

PŘÍKLAD OSMÝ. Nechť n je číslo ve tvaru $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$. Navrhněte výpočet $\varphi(n)$ pomocí principu inkluze a exkluze. (Je tedy třeba nastavit množiny A_i. Předchozí cvičení napovídá, co by mohly být průniky.)

PŘÍKLAD DEVÁTÝ. [2B] Dopočítejte přesný vzorec pro Eulerovu funkci. Použijte prvočíselný rozklad čísla n.