PŘÍKLAD PRVNÍ. V následujících cvičeních se nám budou hodit i další řady a vzorce. Jeden z nich jsou asi i ze střední školy známá *Fibonacciho čísla*. Ta jsou definována třeba takto:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}.$$

Jako procvičení těchto čísel ukažte platnost tvrzení, že mezi každými dvěma mocninami dvojky (tedy v uzavřeném intervalu $[2^i, 2^{i+1}]$) je alespoň jedno Fibonacciho číslo.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Druhý typ čísel, která si zadefinujeme, nazýváme *Stirlingova čísla druhého druhu*. Existují i prvního druhu, ale ty zde probírat nebudeme, proto jim budeme říkat *Stirlingova čísla*.

Ta se definují tak, že $\left\{ {n \atop k} \right\}$ znamená počet způsobů, jak rozepsat množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na disjunktní sjednocení k neprázdných množin.

Tedy $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$, protože $\{1, 2, 3, 4\}$ můžu napsat jako sjednocení jednoprvkové množiny a tříprvkové množiny (4 možnosti), nebo jako sjednocení dvou dvouprvkových (3 možnosti).

Jako procvičení těchto čísel ověřte, že platí vzorec podobný kombinačním číslům:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Nápověda: Dokažte ho nejprve pro $n = 0$, pak pro $k = 0$ a n libovolné a nakonec předpokládejte, že n i k jsou větší nebo rovné jedné a pak jej dokažte odebráním jednoho elementu a počítacím argumentem (jako pro $\binom{n}{k}$ nebo pro počty sudých a lichých podmnožin).

PŘÍKLAD TŘETÍ. Připomeňte si (nebo znovu odvoďte):

- Kolik je všech relací na n-prvkové množině?
- Kolik je reflexivních relací na n?
- Kolik je symetrických relací na n?

PŘIKLAD ČTVRTÝ. Kolik je všech permutací na n-prvkové množině?

PŘÍKLAD PÁTÝ. Kolik je všech bijekcí mezi n-prvkovými množinami?

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Kolik je všech prostých funkcí z m-prvkové množiny do n-prvkové množiny? Zkuste to dokázat matematickou indukcí.

PŘÍKLAD SEDMÝ. Kolik je všech surjektivních funkcí z m na n?

Nápověda: Souvisí to s některou řadou čísel, kterou jsme si definovali dnes nebo minule.

PŘÍKLAD OSMÝ [2B]. Abychom spočetli počet ekvivalencí, musíme trochu více prohlédnout do toho, jak se ekvivalence vlastně chovají.

- Nejprve ukažte, že jsou-li dva prvky x, y v ekvivalenci, tak všechny prvky v relaci s x jsou i v relaci s y a naopak. Zároveň s tím ukažte, že všechny prvky, které nejsou v relaci s x, nejsou v relaci s y ani naopak.
- Předchozí tvrzení nám říká, že ekvivalence rozdělí prvky na disjunktní skupiny, kde všechny prvky uvnitř skupiny jsou v relaci a žádné prvky mimo skupinu v relaci nejsou. Těmto skupinám se říká *třídy ekvivalence*.
- Nyní víte, že ekvivalence je přesně určená svými třídami ekvivalence. Využijte toho a vyjádřete počet ekvivalencí na n-prvkové množině jako sumu nebo součin. Můžete přitom využít už známých hodnot (Fibonacciho čísel, kombinačních čísel, Stirlingových čísel...)