2. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

indukce, kombinační čísla

Úloha první

Buď X množinou, $|X| \geq 1$. Dokažte, že počet podmnožin liché velikosti X se rovná počtu podmnožin sudé velikosti X.

Nápověda: Počítejte S_n, počet podmnožin X sudé velikosti pro $|X| = n$. Rozdělte sudé množiny na ty, které obsahují a nebo neobsahují prvek n, a ukažte, že $S_n = S_{n-1} + L_{n-1}$.

Úloha druhá

Dokažte matematickou indukcí:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Nápověda: Standardní indukce, prostě se začne sumou pro $n+1$ členů, ten se rozdělí na n plus první člen a sumu pro n členů, za sumu pro n členů se dosadí pravá straná pro n členů a výsledek (pravá strana pro $n+1$ členů) se dostane úpravou. Nezapomeňte na kontrolu pro $n = 1$ nebo $n = 0$.

Úloha třetí

Dokažte nebo vyvraťte:

Máme-li obdélník a do něj kreslíme přímky (které jdou od kraje ke kraji), pak výsledné oblasti umíme obarvit dvěma barvami tak, aby se každé dvě oblasti, které se dotýkají, lišily v barvě. (Dotýkání se přes roh nepočítáme.)

Nápověda: Jde to, dokážeme to indukcí, vložíme $n+1$. přímku, ta nám rozdělí obdélník na dvě oblasti. Jednu z těch oblastí invertujeme (každou černou plošku předěláme na bílou a naopak), druhou necháme, jak byla. Zargumentujeme, že výsledek je dobře obarvený.

Úloha čtvrtá

Mějme mřížku (šachovnici) o velikosti $2^n \times 2^n$. Vašim cílem bude pokrýt tuto mřížku políčky tvaru L, tedy čtverci 2×2, kde jedno políčko chybí.

Aby to nebylo tak snadné (nebo tak nemožné), jedno políčko na šachovnici je už dopředu vyloupnuto. Ukažte, že je ji nyní možné pokrýt, nezávisle na tom, které políčko je vyloupnuto.

Nápověda: Všimneme si, že když vložíme jedno L na správnou pozici, tak to rozdělíme na čtyři případy o velikosti $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Úloha pátá

Dokažte známý vzorec:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Nápověda: Počet k-prvkových podmnožin množiny čísel 1 až n rozdělíme na dva případy, kdy n je v k-prvkové podmnožině, a na ty, kdy není.

Úloha šestá

Dokažte:

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Nápověda: Indukcí, jen je třeba si rozmyslet, jak přesně se odkázat na předchozí případ.

Úloha sedmá – [1b]

Dokažte matematickou indukcí, jaký je počet oblastí, které vymezuje n přímek v obecné poloze (žádné nejsou rovnoběžné a každé dvě mají unikátní průsečík).

Nejprve si tipněte výsledný vzoreček podle malých příkladů a pak jej dokažte indukcí.

3. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

počty objektů

PŘÍKLAD PRVNÍ. V následujících cvičeních se nám budou hodit i další řady a vzorce. Jeden z nich jsou asi i ze střední školy známá *Fibonacciho čísla*. Ta jsou definována třeba takto:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}.$$

Jako procvičení těchto čísel ukažte platnost tvrzení, že mezi každými dvěma mocninami dvojky (tedy v uzavřeném intervalu $[2^i, 2^{i+1}]$) je alespoň jedno Fibonacciho číslo.

Nápověda: Indukcí; vezměte si nejvyšší Fibonacciho číslo z intervalu $[2^{n-1}, 2^n]$ (to, že tam bude aspoň jedno, je indukční předpoklad) a ukažte, že hned následující Fibonacciho číslo padne do intervalu $[2^n, 2^{n+1}]$.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Druhý typ čísel, která si zadefinujeme, nazýváme *Stirlingova čísla druhého druhu*. Existují i prvního druhu, ale ty zde probírat nebudeme, proto jim budeme říkat *Stirlingova čísla*.

Ta se definují tak, že $\left\{ {n \atop k} \right\}$ znamená počet způsobů, jak rozepsat množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na disjunktní sjednocení k neprázdných množin.

Tedy $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$, protože $\{1, 2, 3, 4\}$ můžu napsat jako sjednocení jednoprvkové množiny a tříprvkové množiny (4 možnosti), nebo jako sjednocení dvou dvouprvkových (3 možnosti).

Jako procvičení těchto čísel ověřte, že platí vzorec podobný kombinačním číslům:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Nápověda: Pro $n = 0$ a $k = 0$ a n libovolné není co dokazovat, neboť není co s čím sečíst. Tedy předpokládejte, že n i k jsou větší nebo rovné jedné a pak jej dokažte odebráním jednoho elementu a počítacím argumentem (jako pro $\binom{n}{k}$ nebo pro počty sudých a lichých podmnožin).

PŘÍKLAD TŘETÍ. Připomeňte si (nebo znovu odvoďte):

- Kolik je všech relací na n-prvkové množině?
- Kolik je reflexivních relací na n?
- Kolik je symetrických relací na n?

Nápověda: Nakreslíme relaci maticovým zápisem. Máme n^2 políček, některá z nich jsou volná (na nich máme 2 možnosti) a některá jsou určená jinými.

PŘIKLAD ČTVRTÝ. Kolik je všech permutací na n-prvkové množině?

PŘÍKLAD PÁTÝ. Kolik je všech bijekcí mezi n-prvkovými množinami?

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Kolik je všech prostých funkcí z m-prvkové množiny do n-prvkové množiny? Zkuste to dokázat matematickou indukcí.

Nápověda: je to $n^{\underline{m}}$. První prvek má n možností, druhý už jen $n-1$ možností, třetí už $n-2$ možností ...

PŘÍKLAD SEDMÝ. Kolik je všech surjektivních funkcí z m na n?

Nápověda: Je to skoro Stirlingovo číslo. Množina čísel, která se zobrazí na hodnotu i, je nějaká množina čísel od 1 do m. Vidíme, že když vezmeme tyto množiny pro všechna i, tak je to rozklad $\{1, 2, \ldots, m\}$ na n množin. Ještě ale vezmeme v potaz, že rozklad na množiny nerozlišuje mezi množinou čísel, která se zobrazí na 1 a tou, která se zobrazí na 2, takže budeme Stirlingovo číslo muset přinásobit ještě počtem uspořádání n množin.

Příklad osmý [2b]. Abychom spočetli počet ekvivalencí, musíme trochu více prohlédnout do toho, jak se ekvivalence vlastně chovají.

- Nejprve ukažte, že jsou-li dva prvky x, y v ekvivalenci, tak všechny prvky v relaci s x jsou i v relaci s y a naopak. Zároveň s tím ukažte, že všechny prvky, které nejsou v relaci s x, nejsou v relaci s y ani naopak.
- Předchozí tvrzení nám říká, že ekvivalence rozdělí prvky na disjunktní skupiny, kde všechny prvky uvnitř skupiny jsou v relaci a žádné prvky mimo skupinu v relaci nejsou. Těmto skupinám se říká *třídy ekvivalence*.
- Nyní víte, že ekvivalence je přesně určená svými třídami ekvivalence. Využijte toho a vyjádřete počet ekvivalencí na n-prvkové množině jako sumu nebo součin. Můžete přitom využít už známých hodnot (Fibonacciho čísel, kombinačních čísel, Stirlingových čísel...)

Nápověda: Bylo za DÚ; výsledkem je Bellovo číslo, což je $\sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$.

4. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

kombinatorické počítání, PIE

PŘÍKLAD PRVNÍ. Spočítejte počet přirozených čísel $n < 1000$, která nejsou dělitelná čísly 2,3,5 a 7.

Nápověda: PIE, počítám ta, která jsou dělitelná, a odečtu od 1000. A_i bude tedy množina čísel od 1 do 1000 dělitelná číslem i.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Spočítejte počet uspořádaných dvojic (A, B), kde

$$A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Nápověda: Počet všech podmnožin množiny X velikosti n můžu spočítat tak, že každé podmnožině přiřadím jednu posloupnost n jedniček a nul tak, že 0 je tam, kde prvek v podmnožině není, a 1 tam, kde je. Počet posloupností nul a jedniček je 2^n, a tedy i podmnožin.

Stejný argument použiju tady, jen s budu mít řetízek s čísly $0, 1, 2$.

PŘÍKLAD TŘETÍ. Spočitejte počet rozestavení 5 vodníků a 7 čarodějnic, ve kterých platí, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe. (Dva vodníci nebo dvě čarodějnice nejsou rozeznatelní.)

Nápověda: Nejdřív rozestavím 7 čarodějnic, to mi dá 8 mezer, a do jedné mezery smím položit jen jednoho vodníka.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Rozděluji k různobarevných bonbonů n dětem. Kolika způsoby je mohu rozdat, pokud:

- každému musím dát alespoň jeden,
- každému musím dát nejvýše jeden,
- každému můžu dát libovolně.

Spočítejte také všechny varianty, pokud bonbony jsou všechny stejné barvy.

Nápověda: Bylo za úkol, některé výsledky jsou z počtu funkcí, na jiné (nerozlišitelné bonbony) je třeba použít „krabičkový princip“.

PŘÍKLAD PÁTÝ. Kolik existuje pořadí písmen `A-P`, z nichž vypuštěním některých písmen nelze dostat ani jedno ze slov `PONK, DOBA, COP`? Co když zakážeme ještě `OPICE`?

Nápověda: Počítám pomocí PIE, budu opět počítat opačnou situaci, čili pomocí PIE počítám, kolik je permutací `A-P`, která obsahují `PONK` atd. Nakonec to odečtu od počtu všech permutací a dostanu výsledek.

Co se týče počítání jednotlivých situací, je třeba vymyslet, jak je napočítat – jeden způsob je například rozházet písmena `A-P` bez písmen `PONK`, což je 12!, a pak spočítat všechny možnosti, jak rozesadit písmenka `PONK`, aby byly za sebou.

PŘÍKLAD ŠESTÝ [2B] Spočítejte počet surjektivních zobrazení (zobrazení na) z m prvkové do n prvkové posloupnosti pomocí principu inkluze a exkluze. Z tohoto vzorce pak znovu-odvoďte vzorec (sumu) pro Stirlingova čísla.

Nápověda: Použiji PIE a opět mám zadání ve formě „a zároveň“, čili počítám sjednocení doplňků. A_i, přes které počítám, bude „množina funkcí, které se nezobrazí na hodnotu i“.

5. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

PIE a šatnářka

Za 14 dní písemka. (Indukce, konečné relace, kombinační čísla, kombinatorické počítání, PIE).

PŘÍKLAD MÍNUS PRVNÍ. Na tabuli: Máme 5 vodníků a 7 čarodějnic. Kolika způsoby mohu postavit vodníky a čarodějnice do řady tak, aby dva vodníci nestáli nikdy vedle sebe?

PŘÍKLAD NULTÝ. Na tabuli: Dokažte, že pro $š(n)$ (počet způsobů vyřešení šatnářky) platí rekurence $š(n) = (n-1)(š(n-1) + š(n-2))$.

Nápověda: Jednička má $n-1$ možností, kam se zobrazí. Když vyberu zobrazení jedničky (třeba na i), případy pak rozdělím na dvě situace: jestli se i zobrazí zpět na jedničku – $š(n-2)$ – nebo se i zobrazí na jiné číslo a jedničku má vlastně „zakázanou“ – $š(n-1)$.

PŘÍKLAD PRVNÍ. Kolika způsoby lze umístit 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly 4 kameny ve stejném řádku nebo sloupci?

Nápověda: PIE, všímám si, že se mi může stát, že 4 kameny jsou ve dvou řádcích nebo dvou sloupcích, nebo v jednom řádku a sloupci najednou.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Mohu pomocí inkluze a exkluze spočítat velikost průniku $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$?

Nápověda: Ano, jako $|\bigcap_{i=1}^{n} A_i| = s - PIE(\not{A}_i)$, kde s je počet všech situací. Takto počítáme principem inkluze a exkluze často; pokud se nás úloha ptá na „počet situací, kde to a toto a ono platí zároveň“, tak počítáme opačné případy, tedy „počet situací, kde neplatí to nebo neplatí toto nebo neplatí ono“.

Nezapomeneme odečíst od počtu všech situací.

PŘÍKLAD TŘETÍ. Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušnici žádného národa netvořili souvislý blok?

Nápověda: Jak nám předchozí případ radí, máme problém popsán pomocí „a zároveň“, čili A_1 bude situace taková, že Češi stojí za sebou, A_2 Rusové atd. Protože jednotliví lidé z jednoho národa nejsou rozlišitelní, nesmíme to při počítání zanedbat.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Určete počet permutací s:

- právě jedním pevným bodem
- právě k pevnými body.

Nápověda: Má-li právě jeden pevný bod, tak zbytek je vlastně permutace bez pevného bodu, kterou můžeme vyjádřit pomocí funkce $š(x)$. Tu není třeba při každém použití rozepisovat. Podobně i druhý podbod, jen vybereme čísla, která pevný bod mít budou.

PŘÍKLAD PÁTÝ. Kolik existuje permutací čísel $1, 2, \ldots, 10$, kde se žádné sudé číslo nezobrazí na sebe?

Nápověda: Můžeme spočítat jako sumu například pomocí PIE nebo pomocí předchozího případu, čili vybrat čísla, co se mohou zobrazit, a zbytek vyjádřit pomocí $š(x)$.

Následující příklady počítají s *Eulerovou funkcí* – to je funkce $\varphi(n)$, která pro n spočítá počet všech čísel a od 1 do n, ktera jsou nesoudělna s číslem n. Tzn. $NSD(a, n) = 1$.

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Kolik vyjde $\varphi(n)$, pokud n je prvočíslo? A kolik, je-li to mocnina prvočísla?

PŘÍKLAD SEDMÝ. Mějme p_1, p_2 prvočísla. Kolik je čísel od 1 do n, která dělí jak prvočíslo p_1, tak p_2? A dá se tento počet vyjádřit pro m různých prvočísel?

Příklad osmý. Nechť n je číslo ve tvaru $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$. Navrhněte výpočet $\varphi(n)$ pomocí principu inkluze a exkluze. (Je tedy třeba nastavit množiny A_i. Předchozí cvičení napovídá, co by mohly být průniky.)

Příklad devátý. [2b] Dopočítejte přesný vzorec pro Eulerovu funkci. Použijte prvočíselný rozklad čísla n.

Nápověda: Tyto příklady se zase počítají pomocí PIE. Počítáme opak, čili počet čísel od 1 do n, která dělí prvočíslo p_i. Výsledek mi stačil jako PIE suma se správnými hodnotami pro průniky na pravé straně PIE.