11. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Kostry, příprava na zkoušku

Kostry:

PŘÍKLAD PRVNÍ. Zadefinujme si $G : e$, takzvané *kontrahování hrany* $e = \{u, v\}$, jako operaci, která z grafu G vytvoří graf G', ve kterém se vrcholy u a v spojí dohromady, jako by to byl jediný vrchol, a odstraní se smyčky, nicméně paralelní hrany se **nechávají**.

Dokažte, že pro počet koster $K(G)$ platí vzoreček $K(G) = K(G/e) + K(G : e)$.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Spočítejte počet koster dvou grafů na tabuli.

PŘÍKLAD TŘETÍ. Spočítejte počet koster úplného grafu K_n, které všechny používají jednou zadanou hranou. Jakmile to dopočítáte, odvoďte, kolik existuje koster úplného grafu K_n bez jedné hrany.

Nápověda: Na první část použijte počítání dvěma způsoby na dvojice (T, e), kde T je kostrou úplného grafu a e je některá z hran v T.

Grafy:

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Jsou všechny $(n-1)$-regulární (mají všechny stupně přesně $n-1$) grafy na n vrcholech isomorfní? A co všechny $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech? Dokažte nebo vyvraťte pro oboje.

PŘÍKLAD PÁTÝ. Kolik *nejvýše* hran může obsahovat graf s n vrcholy a k komponentami? (Takové grafy jsou různé, ptáme se na počet hran toho největšího z nich.)

PŘÍKLAD ŠESTÝ. Dokažte, že každý konečný graf G najdeme jako indukovaný podgraf v nekonečném grafu $(\mathbb{N}, E)$, kde hrana mezi čísly x a y vede právě tehdy, když $\mathrm{NSD}(x, y) > 1$.

Uspořádání:

PŘÍKLAD SEDMÝ. Pro graf $G = (V, E)$ definujme uspořádání C tak, že nosná množina jsou hrany E a platí eCf, pokud $e = f$ nebo e leží na stejné kružnici jako f.

Dokažte, že je toto uspořádání ekvivalencí a zkuste popsat jeho třídy ekvivalence.

PŘÍKLAD OSMÝ. Nechť G je orientovaný graf. Zadefinujme relaci R na jeho vrcholech tak, že xRy, pokud z x do y vede orientovaná cesta. Dokažte, že R je reflexivní a tranzitivní, a dokažte také, že $R \cap R^{-1}$ je ekvivalence. Co jsou třídy této ekvivalence?

PŘÍKLAD DEVÁTÝ. Vezměme graf G. Uvažujme relaci „býti podgrafem“ na množině všech jeho podgrafů. Tedy $G_1 R G_2$, pokud je G_1 podgrafem G_2. Dokažte, že jde o uspořádání, a zkuste spočítat minimální prvky, maximální prvky a délku nejdelšího řetězce.

Kombinatorické počítání:

PŘÍKLAD DESÁTÝ. Spočítejte počet různých grafů na n vrcholech bez izolovaných vrcholů.

PŘÍKLAD JEDENÁCTÝ. Mějme tabulku $n \times n$ a počítejme počet cest takových, začínají v políčku $(1, 1)$, končí v (n, n), chodí pouze doprava a nahoru a nikdy nepřekročí diagonálu, tj. nikdy nepřejdou z políčka (k, k) nahoru.

Aniž byste věděli, kolik těchto cest je, dokažte, že jich je stejně jako počet korektních uzávorkování $2n$ závorek.

PŘÍKLAD DVANÁCTÝ. Spočítejte rozdělení 10 identických kuliček do 3 (rozlišitelných) přihrádek tak, že první krabička nesmí dostat více jak 5 kuliček, druha ne více jak 4 kuličky a třetí ne více než 3 kuličky.

PŘÍKLAD TŘINACTÝ – [2B].

Mějme opět n párů, teď je ale chceme rozesadit ke kruhovému stolu s $2n$ očíslovanými židlemi, aby žádný pán neseděl vedle své manželky. Kolik na to máme možností?

Nápověda: Řešte pomocí PIE. A_i buď množina rozsazení, kdy i-tý pár sedí vedle sebe.