0. PÍSEMKA Z KOMBINATORIKY A GRAFŮ

řešení

Úloha nultá – [5b]

Spočítejte počet pokrytí dominovými kostkami 2×1 šachovnice tvaru T – ta vypadá tak, že na čtverec 2×2 jsou nalepeny tři paže délky $k \times 2$.

Řešení: Počet pokrytí šachovnice $2 \times k$ je F_k. Do čtverce 2×2 uprostřed buď zasahuje pokrytí vertikálního sloupce, nebo ne. Pokud do něj nezasahuje, tak stačí počítat $F_{2k+2}F_k$. Pokud do něj zasahuje (protíná hranici mezi čtvercem a paží), tak už je jednoznačně vydlážděný čtverec 2×2 a zároveň je jednoznačně určena jedna řádka této paže. Zbytek můžeme vydláždit libovolně. Tedy v této variantě máme $F_{k-1}F_kF_k$ možností. Celkový počet pokrytí je pak součet těchto dvou čísel.

Úloha první – [5b]

Nalezněte co nejmenši číslo k takové, že všechny rovinné grafy bez trojúhelníku jsou k-degenerované.

Nápověda: Pro takové grafy platí nerovnost $|E| \leq 2|V| - 4$.

Řešení: Zde to jde snadno úpravami nerovnice:

$$|E| \leq 2|V| - 4$$
$$\sum deg(v) - 4|V| \leq -8$$
$$\sum (deg(v) - 4) \leq -8.$$

Součet čísel na levé straně musí být záporný, a tedy některý prvek sumy musí být záporný, ale to znamená, že existuje stupeň, který je menší než 4. Protože pro rovinné grafy (bez trojúhelníku) obecně platí, že po odtrhnutí vrcholu je graf opět rovinný (bez trojúhelníku), máme, že rovinné grafy bez trojúhelníku jsou 3-degenerované.

Co se týče dolního odhadu, tak stačí uvážit mřížku vrcholů 3×3, kde správně „kvadrangulujeme“ vnější stěnu. Vrchol stupně 2 tam potom vůbec nemáme.

Úloha druhá – [5b]

Nalezněte koeficient x^{50} v součtu $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^3$.

Řešení: Standardní postup. Vytvořující funkce pro tuto řadu je $1/(1-x)^3$, což si můžeme představit jako konvoluci řady $1/(1-x)^2$ a $1/(1-x)$, a v taháku snadno nalezneme, že první řáda odpovídá číslům $1, 2, 3, 4\ldots$ a druhá $1, 1, 1, 1\ldots$. Konvoluce tedy bude sčítat prvních k přirozených čísel, což dává $k(k+1)/2$. Koeficient pro x^50 je tedy $50 * 51/2$.

Úloha třetí – [5b]

Kolik různých přesmyček (permutací) lze vytvořit ze znaků $\{A, B, C, D, E, \ldots, P\}$, aby žádná neobsahovala ani jedno z podslov PONK, BOD, DOBA, PIC, COP?

Poznámka: Ve výsledku není třeba rozepisovat výrazy jako $k!$. Sumy a rekurence by se však vyskytovat neměly.

Řešení: Budeme sčítat pomocí principu inkluze a exkluze.

Úloha čtvrtá – [5b]

Nalezněte vzorec pro n-tý člen rekurence:

$$g_n = 3g_{n-1} + (-1)^{g_{n-1}}, g_0 = 1$$

Řešení: Nejprve je třeba si všimnout, že člen $(-1)^{g_{n-1}}$ je zde trochu pro „zmatení nepřítele“, a lze jej snadno zjednodušit: pokud g_{n-1} je liché, tak g_n bude sudé a naopak, bude se to tedy střídat jako $(-1)^n$ (že to nebude -1^{n+1}, uvidíme z nultého prvku).

Zapíšeme si tedy vytvořující funkci, dosadíme vytvořující funkci pro $(-1)^n$:

$$G(x) = 3xG(x) + 1/(1+x)$$

Přenásobíme celou rovnici $(1+x)$, rozložíme na parciální zlomky a vypočítáme vzorec pro n-tý člen. (Brzy se tu objeví přesný výsledek.)

Úloha pátá – [5b]

Vyřešte sumu pro $n \geq m \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} / \binom{n}{k}.$$

Řešení: Můžeme si hrát s kombinačními čísly, nebo použít „hrubou sílu“ a rozepsat si to na faktoriály. Máme:

$\sum_k \frac{m!k!(n-k)!}{n!k!(m-k)!} = (m!/n!) \sum_k \frac{(n-k)!}{(m-k)!} = (m!/n!) \sum_k (n-k) \cdot (n-k+1) \cdots (m-k+1) = (m!/n!) \sum_k (n-k)^{\underline{m}}$

Tato suma už je skoro sumou $\sum x^{\underline{r}}$, kterou jsme řešili v DÚ. Jen upravíme sumaci místo od $k=0$ do n z $n-m$ do n. Po dosazení a upravení dostáváme výsledek

$$\frac{n+1}{n+1-m}.$$

Úloha bonusová – [15b]

V diskrétní integraci můžeme použít analog derivování per partes, jen s malým rozdílem. V neurčitém tvaru píšeme, jsou-li f, g funkce na přirozených číslech:

$$\sum f\Delta(g) = fg - \sum E(g)\Delta(f).$$

$E(g)$ je operátor posunu, který z funkce g vyrobí funkci o jedno x vyšší: $E(g(x)) = g(x+1)$. Vzorec platí přirozeně i pro určité sumy.

Vyřešte sumu $\sum_{k=0}^{n-1} kH_k$ například pomocí této metody.

Nápověda: Jak se řeší integrál $\int x \ \ln x \ dx$?

Řešení: Použijeme lautr stejný postup, jako na tento integrál. Použijeme per partes, volíme $f(k) = H_k$ a $\Delta g(k) = k$, máme $g(k) = k^{\underline{2}}/2$ a $\Delta f(k) = 1/k(k+1)$. Zbytek jsou jen úpravy, kde je třeba si dát trochu pozor na Eg.