6. CVIČENÍ Z KG1

projektivní roviny 2

Příklad nultý

Existují dvě neisomorfní konečné projektivní roviny řádu 2? Existují dvě neisomorfní konečné projektivní roviny řádu 3? Obě tvrzení dokažte nebo vyvraťte.

Příklad první

Barevnost grafů můžeme zobecnit na další struktury, například na obecné systémy podmnožin. Opět barvíme vrcholy (elementy nosné množiny V) barvami $1, 2, \ldots, r$, ale podmínka bude jiná: Systém podmnožin množiny V je (dobře) *r-obarvený*, pokud každá podmnožina obsahuje alespoň jeden vrchol ze všech barev od 1 do r.

Systém množin může být třeba takovýto: $\{\{A, B\}, \{A, C\}\}$. Pokud nabarvíme A červeně a B i C modře, máme dobře 2-obarvený systém.

Nalezněte (co do počtu množin) co nejmenší systém pouze tříprvkových podmnožin, který není dobře 2-obarvitelný. Nemusíte dokazovat, že je nejmenší, ale snažte se najít opravdu malý.

Příklad druhý

Místo axiomu (P0) (existence čtverce) definujme axiom (P0.5):

(P0.5): Existují alespoň 2 různé přímky, z nichž každá má alespoň tři body.

Dokažte, že trojice (P0), (P1) a (P2) je ekvivalentní s trojicí (P0.5), (P1) a (P2). Je také pravda, že (P0) je ekvivalentní s (P0.5)?

Příklad třetí

Pro $m \leq n$ definujme *latinský obdélník* $m \times n$ jako obdélníkovou matici, kde v každém políčku je zapsáno jedno číslo z $1 \ldots n$ a v žádném řádku ani sloupci se čísla neopakují.

Kolik existuje všech možných latinských obdélníků $2 \times n$?

6. CVIČENÍ Z KG1

projektivní roviny 2

Příklad nultý

Existují dvě neisomorfní konečné projektivní roviny řádu 2? Existují dvě neisomorfní konečné projektivní roviny řádu 3? Obě tvrzení dokažte nebo vyvraťte.

Příklad první

Barevnost grafů můžeme zobecnit na další struktury, například na obecné systémy podmnožin. Opět barvíme vrcholy (elementy nosné množiny V) barvami $1, 2, \ldots, r$, ale podmínka bude jiná: Systém podmnožin množiny V je (dobře) *r-obarvený*, pokud každá podmnožina obsahuje alespoň jeden vrchol ze všech barev od 1 do r.

Systém množin může být třeba takovýto: $\{\{A, B\}, \{A, C\}\}$. Pokud nabarvíme A červeně a B i C modře, máme dobře 2-obarvený systém.

Nalezněte (co do počtu množin) co nejmenší systém pouze tříprvkových podmnožin, který není dobře 2-obarvitelný. Nemusíte dokazovat, že je nejmenší, ale snažte se najít opravdu malý.

Příklad druhý

Místo axiomu (P0) (existence čtverce) definujme axiom (P0.5):

(P0.5): Existují alespoň 2 různé přímky, z nichž každá má alespoň tři body.

Dokažte, že trojice (P0), (P1) a (P2) je ekvivalentní s trojicí (P0.5), (P1) a (P2). Je také pravda, že (P0) je ekvivalentní s (P0.5)?

Příklad třetí

Pro $m \leq n$ definujme *latinský obdélník* $m \times n$ jako obdélníkovou matici, kde v každém políčku je zapsáno jedno číslo z $1 \ldots n$ a v žádném řádku ani sloupci se čísla neopakují.

Kolik existuje všech možných latinských obdélníků $2 \times n$?