5. DÚ Z KG1

Velký balík úkolů

Tyto úkoly bude možné odevzdávat až do posledního cvičení.

Příklad mínus první – [3b]

Existuje nekonečná spočetná projektivní rovina? Na přednášce jste si nejspíše říkali o reálné projektivní rovině, což je rovina doplněná o body a přímky v nekonečnu. Tato rovina splňuje všechny 3 axiomy (až na konečnost, kterou jsme doposud předpokládali), avšak má nespočetně mnoho bodů. Existuje projektivní rovina, která má nekonečně spočetně mnoho bodů? Dokažte anebo vyvraťte toto tvrzení.

Poznámka: Spočetně znamená, že množina bodů a přímek bude stejně mohutná, jako velikost přirozených čísel. To se ukazuje většinou bijekcí.

Asi víte z analýzy, že např. racionálních čísel je také spočetně, avšak reálných už ne.

Příklad nultý – [2b]

Dokažte nebo vyvraťte: existuje síť (s reálnými kapacitami), ve které existuje konečný počet maximálních toků, který je ale ostře větší než jedna?

Přiklad první – [1b]

Je problém hledání maximálního toku stále rychle řešitelný, pokud máme v grafu více zdrojů a více stoků? (Tekutina může téci z libovolného zdroje do libovolného stoku.)

Příklad druhý – [3b]

Popište chování a spočítejte složitost algoritmu, který pro daný graf umí spočitat jeho minimální (vrcholou nebo hranovou) k-souvislost.

Nápověda: Připomeňte si Mengerovu větu.

Přiklad třetí – [3b]

Spočítejte počet koster úplného grafu na n vrcholech bez jedné hrany. Můžete použít větu o počtu koster úplného grafu.

Příklad čtvrtý – [4b]

Vět o pevném bodě je několik. Z přednášky byste měli znát Brouwerovu větu o pevném bodě. Dokažte následující větu o pevném bodě, která je přisuzována Bourbakimu:

Nechť $(X, \leq)$ je ČUM (ne nutně konečná) taková, že v ní existuje nejmenší prvek a nechť v ní má každý řetězec $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ supremum. (Supremum je nejmenší horní mez.) Nechť funkce f z X do X zachovává suprema řetězců. Pak má f pevný bod s, tedy prvek $s \in X : f(s) = s$.

Zachovávání suprem řetězců znamená, že pokud je $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots$ řetězec a pokud $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \ldots$ je také řetězec, pak supremum s prvního řetězce se zobrazí na $f(s)$, supremum druhého řetězce.

Příklad pátý – [3b]

A ještě jedna věta o pevném bodě. Dokažte, že pro každou konečnou ČUM $(P, \leq)$ existuje nezávislá množina maximální velikosti, která se každým automorfismem zobrazí sama na sebe.

Automorfismus je isomorfismus ze struktury do té samé struktury.