3. DÚ Z KG1

Vytvořující funkce

Nejprve si ukažme jeden (skoro) příklad z cvičení celý vyřešen pořádně. (V zadání z cvičení mi vypadlo jedno znaménko plus.) Řešme tedy rekurenci

$$g_0 = g_1 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n.$$

Nultý krok: přepišeme do jedné rovnice. Tedy:

$$g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n + [n = 1].$$

(Pozor, člen $(-1)^n$ měl smysl i v krajních případech $[n = 0]$ a $[n = 1]$, kdybychom to napsali jako $\ldots + (-1)^n + [n = 0] + [n = 1]$, dostali bychom špatný výsledek pro g_1.)

První krok: vezměme si $\sum g_n x^n$ a zapišme ji rekurentně pomocí pravidla výše:

$$G(x) = \sum g_n x^n = \sum g_{n-1}x^n + 2\sum g_{n-2}x^n + \sum(-1)^n x^n + \sum[n = 1]x^n =$$
$$= xG(x) + 2x^2G(x) + 1/(1 + x) + x.$$

Všimněme si, že jsme využili faktu, že vytvořující funkci pro $(1, -1, 1, -1\ldots)$ už známe, a že součet vytvořujících funkcí je vytvořující funkce součtu.

Druhý krok: musíme získat vytvořující funkci pro celé $G(x)$. To je jen elementární počítání, nakonec dostaneme:

$$G(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(1 + x)^2(1 - 2x)}.$$

Nakonec třetí krok, vyčíst vzorec pro n-tý člen. Pracujeme s racionální funkcí, budou se nám tedy hodit parciální zlomky, kde platí, že existují tři čísla a, b, c tak, že:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(1 + x)^2(1 - 2x)} = a(\frac{1}{1 - 2x}) + b(\frac{1}{1 + x}) + c(\frac{1}{(1 + x)^2}).$$

Vynásobením celé rovnice jmenovatelem na levé straně získáme tři rovnice o třech neznámých (neznámé jsou a, b, c a rovnice odpovídají jednotlivým koeficientům v polynomu, tedy x^2, x a x^0). Nalezení koeficientů je pak už jen lineární algebra.

Jakmile máme koeficienty, můžeme (díky pravidlu součtu vytvořujících funkcí) napočítat i přesný vzorec pro n-tý člen. Vzorec pro třetí člen je $n(-1)^n$, protože se jedná o součin dvou generujících funkcí $1/1 + x$, který se podle pravidla o součinu chová jako konvoluce

$$-1 \cdot -1 + 1 \cdot 1 + -1 \cdot -1 \ldots.$$

Celkem tedy:

$$g_n = a2^n + b(-1)^n + cn(-1)^n.$$

Poznámka: Řešeni lineárních rovnic neuvádím pouze pro stručnost. V písemce bude potřeba vše vyřešit i s koeficienty.

Příklad nultý – [4b]

Vyřešte obě rekurence zmíněné v nultém příkladu: počet koster vějíře (graf na n vrcholech, který obsahuje cestu délky $n-2$ a vrchol, který je spojen s každým vrcholem této cesty) a počet správných uzávorkování pro n otevíracích závorek (posloupností $2n$ závorek tak, že všechny závorky jsou korektně spárovány).

Příklad první – [3b]

Rozložte následující zlomky na parciální tvar:

$$\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{6x}{x^2+2x-3}$$

$$\frac{2x+5}{x^3-1}$$

Přiklad druhý – [2b]

Řešte rekurenci $a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ s počátečními podmínkami $a_0 = 2$, $a_1 = 8$. Určete limitu a_n pro n v nekonečnu.

Příklad třetí – [3b]

Bankovní lupič vyžaduje od pokladní $50000Kč$ v tisícovkách a dvoutisíckovkách. Vyžaduje taky počet způsobů, jak to jde vyplatit. Pomozte pokladní zabavit lupiče, než přijede zásahová jednotka, tím, že tento počet způsobů odvodíte.