1. DÚ Z KG1

odhady, Stirlingova čísla

Příklad nultý – [2b]

Dokažte pro kladné přirozené n:

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Příklad první – [0b;7b]

Prozkoumejte Stirlingova čísla (druhého druhu). Připomínám „oficiální“ definici Stirlingových čísel – je to počet rozložení n-prvkové množiny do neprázdných, k-prvkových množin. Značí se $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Například $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$, protože $\{1, 2, 3, 4\}$ lze rozložit na tyto 2 neprázdné množiny:

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}; \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}; \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}; \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\};$$

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}; \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}; \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}.$$

Poznámky:

- Hlavní část bodů bude za dolní a horní odhady (polynomem, exponencielou – prostě bez sumy) velikosti největšího Stirlingova čísla pro dané n. Čím lepší odhad, tím více bodů.
- Pokud budete chtít používat nějaké vlastnosti Stirlingových čísel, musíte je vždy dokázat (nebo se odvolat na větu z přednášky).
- Menší počet bodů navíc lze získat například za: přímý vzorec (sumu) s důkazem pro $\left\{ {n \atop k} \right\}$, jednodušší vzorce pro krajní (malé n. velké) k, případně další vlastnosti „Pascalova“ trojúhelníku pro Stirlingova čísla 2. druhu.
- Úloha je na procvičení kombinatorického počítání „bez předepsaného řešení“. Nelze to zakázat, ale nedoporučuji příliš konzultovat s Wikipedií a kamarády. (Také za to není příliš mnoho bodů, přestože by se o tématu dal napsat celý článek.)
- První verze taháku na cvičení obsahovala chybný rekurzivní vzorec. Verze vydaná na internetu ho již bude obsahovat správně. (Jeho důkaz není třeba a nebudou za něj body).
- Nebojte se odevzdat jen něco málo – body za to jistě budou.