3. DÚ Z ADS2

Dolní odhady

Termín **pondělí 10. 12. 08:00**. Všimněte si času – v nedělní noci můžete pracovat jak dlouho chcete, ale nezapomeňte to odeslat. Úkoly odevzdávejte emailem na adresu `bohm(at)iuuk.mff.cuni.cz`. Do předmětu napište **ADS2 HW3**.

Prosím odevzdávejte digitálně psané dokumenty, buď ve formátu plaintext nebo v PDF. Při jakýchkoli problémech nebo otázkách se nebojte napsat email a vyřešíme to. Kdybyste s nějakým úkolem zápolili, taky napište.

Příklad na připomenutí z písemky. Nalezněte rozvrstvenou síť, na níž Dinicův algoritmus najde blokující tok v čase $\Omega(m \cdot n)$.

Řešení s myšlenkovým postupem.

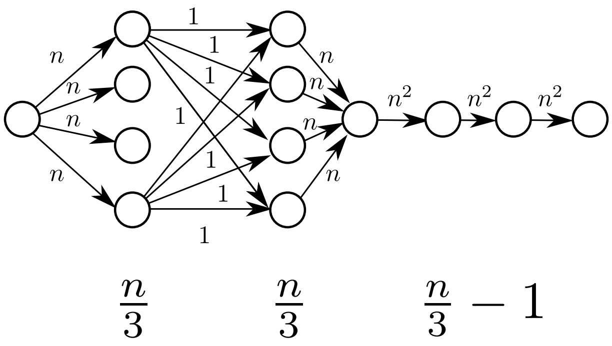
Nejprve si připomeneme, co určitě víme z přednášky a cvičení – nebude nám stačit síť s jednotkovými kapacitami (tam je Dinic rychlejší), nebudou nám stačit ani kapacity omezené konstantou – v nějakou chvíli tam tedy budeme chtít hrany s kapacitou třeba $\Omega(n)$.

Zopakujeme si tedy, jak v Dinicovi proběhne důkaz horního odhadu na složitost. Ten říká, že při každém poslání toku metodou „pošli, co můžeš“ se nasytí alespoň jedna hrana, a toto poslání trvá v nejhorším případě $O(n)$, protože vrstev je nejvíce, jako všech vrcholů.

Musíme tedy najít posloupnost grafů, které splňují obě tyto vlastnosti. První z vlastností se zajistí tak, že budeme mít v grafu mnoho hran kapacity 1, které se nasytí jako jediné z celé cesty – hodí se tedy mít nějaký hustý bipartitní graf, kde budou hrany kapacity 1. Tím, že je hustý, se zajistí, že hran bude dost na výslednou složitost.

Dobrá, ale kdybychom měli jen klasickou bipartitní síť, tak to stačit nebude, protože cesty tam jsou moc krátké, a druhá vlastnost nebude platit. To ale jde vyřešit díky tomu, že nám jde o asymptotický výsledek, ne výsledek absolutní. Můžeme tedy spojit cestu délky $\frac{n}{3}$ a zapojit ji za úplný bipartitní graf, kde jsou obě partity velikosti $\frac{n}{3}$. Asymptotika totiž vychází dobře – počet hran mezi dvěma partitami velikosti $\frac{n}{3}$ vychází i tak jako $\Omega(n^2)$, čili asymptoticky největší možný.

Obrázek:



Příklad první **[3 body.]** Připomeňte si Dijkstrův algoritmus s (normální) haldou – ten běží v čase $O((m+n)\log n)$. Vymyslete posloupnost vstupů, které dokazují, že takto implementovaný algoritmus není asymptoticky rychlejší.

Příklad druhý **[3 body.]** Nalezněte posloupnost sítí, na kterých proběhne $\Omega(n)$-krát rozvrstvení sítě a hledání blokujícího toku.

Příklad třetí **[4 body.]** Pomocí nápadu z vyřešeného příkladu a příkladu 2 zkonstruujte posloupnost vstupů, na kterých Dinicův algoritmus asymptoticky poběží v čase $\Omega(n^2 \cdot m)$.