PŘÍKLAD PRVNÍ **Společně zameteme s událostmi.** Naším úkolem bude vymyslet algoritmus, který dostane zadáno n úseček v rovině a má spočítat seznam průsečíků.

1. Nejprve sami: vymyslete algoritmus s časem $O(n^2)$ a dokažte, že je asymptoticky optimální v nejhorším případě.
2. Potom společně: vymyslíme algoritmus, který zabere $O((n+p)\log n)$ času, pokud nakonec vypíše p průsečíků.

PŘÍKLAD DRUHÝ **Dokazovací okénko.** Mějme n bodů v rovině a postavme si pro ně Voroného diagram. Dokažte, že sestrojíme-li konvexní obal našich n bodů, prochází každou jeho hranou právě jedna nekonečná hrana Voroného diagramu.

PŘÍKLAD TŘETÍ V rovině je dána množina červených a množina zelených bodů. Sestrojte přímku, která obě množiny oddělí. Na jedné její straně tedy budou ležet všechny červené body, zatímco na druhé všechny zelené. Navrhněte algoritmus, který takovou přímku nalezne.

Nejdříve rozmyslete $O(n^2)$ algoritmus, a pak ho zkuste zlepšit na $O(n \log n)$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ **Dokazovací okénko.** Vezměme si n bodů v prostoru a uvažujme kouli s nejmenším možným objemem, která pokrývá všech n bodů. Dokažte, že její střed leži v konvexním obalu těchto n bodů.

Nápověda: Zkuste dokazovat sporem; v tomto důkaze můžete být i trochu neformální.

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějme na vstupu n *osových obdélníků* v rovině – to jsou takové obdélníky, že všechny jejich hrany jsou rovnoběžné s osami. Zadané je máme například čtveřicemi vrcholů.

Vymyslete algoritmus na spočítání celkový obsah sjednocení všech čtverců.

Nápověda:

1. Jako vždy začněte s nalezením $O(n^2)$ řešení. Není to úplně triviální, ale zvládnete to.
2. Potom zkuste zlepšit z $O(n^2)$ na $O(n \log n)$. Může se hodit nějaká datová struktura na zpracovávání *intervalů*.

PŘÍKLAD ŠESTÝ **Dokazovací okénko.** Mějme množinu n bodů v rovině, a uvažujme problém hledání minimální kostry v *metrickém grafu* – tj. úplnému grafu, kde vzdálenosti jsou rovny euklidovské vzdálenosti.

Kdybychom to udělali naivně, tj. postavili si úplný graf a pak spustili algoritmus na minimální kostru, tak se nevyhneme složitosti $\Omega(n^2)$.

K nalezení algoritmu, který to stíhá v čase $O(n \log n)$, bude stačit najít graf, který má $O(n)$ hran a platí pro něj, že jeho minimální kostra je úplně stejná, jako minimální kostra euklidovské metriky.

Dokažte, že Delaunayho triangulace původních n bodů je přesně tento graf.

PŘÍKLAD SEDMÝ Na vstupu dostanete číslo K a našich oblíbených n bodů v rovině. Navrhněte algoritmus, co najde bod x v rovině, ve kterém když nakreslíte kružnici o poloměru K, tak se vám do této kružnice vejde co nejvíce bodů na vstupu, co to jde. Pozor, x nemusí být ani jeden ze vstupu!

1. Navrhněte nejdříve algoritmus s libovolnou polynomiální časovou složitostí.
2. Potom jej zkuste zlepšit na $O(n^2 \log n)$.

PŘÍKLAD OSMÝ **Bonus pro geometrické machry.** Vraťme se ke čtvrtému příkladu. Je pravda, že když vezmeme n bodů v prostoru, a najdeme krychli minimálního objemu, která je obsahuje, tak střed této krychle bude uvnitř konvexního obalu našich n bodů? Dokažte nebo vyvraťte.