8. CVIČENÍ Z ADS2

Komparátory a hradla

Příklad první Pojďme si hrát s paritou! `PARITY` je booleovská funkce na n proměnných, která počítá paritu (sudost počtu) jedniček na vstupu.

1. Ukažte triviální booleovskou hradlovou síť, která spočíta `PARITY` v hloubce $O(\log n)$ a s $O(n)$ hradly.
2. Dokažte, že `PARITY` nelze spočítat jen pomocí hradel typu `AND`.
3. Podívejme se teď na formule, a to konkrétně formule v DNF tvaru. (Ty odpovídají speciálním „třívrstvým“ hradlovým sítím, kde výstupní stupeň je vždy jedna, v první vrstvě jsou jen hradla `NOT`, v druhé `AND` a nakonec `OR`). Ukažte, že DNF formule potřebují velikost $\Omega(2^n)$ na spočítání `PARITY`.
   Jak na to? Funkce `PARITY` je vysoce symetrická; ukažte ted nejprve, že každá klauzule v DNF zápisu vypadá skoro stejně, a pak spočítejte, kolik jich musí být, aby klauzule popsaly všechny možné vstupy.

Poznámka: Platí i věta: booleovské hradlové sítě konstantní hloubky nemohou počítat `PARITY`. To si ale necháme na jiný předmět ...

Zbytek cvičení budeme pracovat s *komparátorovými sítěmi* – speciálními hradlovými sítěmi, kde je jediné hradlo *komparátor*, což je dvouvstupní a dvouvýstupní hradlo, které přijme dvě čísla (ne nutně binární) a na jednom výstupu vypíše minimum a na druhém maximum.

Příklad druhý Navrhněte komparátorovou síť pro zatřídění prvku do setříděné posloupnosti: dostane $(n-1)$-prvkovou setříděnou posloupnost a jeden prvek navíc, vydá setříděnou permutaci.

Příklad třetí Dokažte nula-jedničkový princip: pro ověření, že komparátorová síť třídí všechny vstupy, ji postačí otestovat na všech posloupnostech nul a jedniček.

Příklad čtvrtý Zopakujme z přednášky *bitonické třídění*, které zvládne setřídit vstup pomocí komparátorové sítě hloubky $O(\log n)$ složené z $O(n \log n)$ komparátorů.

D(Bitonická posloupnost**):** Posloupnost $x_0, \ldots, x_{n-1}$ je *čistě bitonická*, pokud ji můžeme rozdělit na nějaké pozici k na neklesající posloupnost $x_0 \leq x_1 \cdots \leq x_k$ a nerostoucí posloupnost $x_k \geq x_{k-1} \geq \cdots x_n$. Jak nerostoucí, tak neklesající část mohou být prázdné či jednoprvkové.

Posloupnost je *bitonická*, pokud je rotací čistě bitonické posloupnosti.

D(Bitonická třídička**):** Bitonická třídička řádu n je komparátorová síť B_n s n vstupy a n výstupy. Dostane-li na vstupu bitonickou posloupnost, vydá ji setříděnou.

D(Separátor**):** Separátor řádu n je komparátorová síť S_n se vstupy $x_0, \ldots, x_{n-1}$ a výstupy $y_0, ..., y_{n-1}$.

Dostane-li na vstupu bitonickou posloupnost, vydá na výstup její permutaci s následujícími vlastnostmi:

- $y_0, \ldots, y_{n/2-1}$ a $y_{n/2}, \ldots, y_{n-1}$ jsou bitonické posloupnosti;
- $y_i \leq y_j$, kdykoliv $0 \leq i < n/2 \leq j < n$.

Použijme naše nové $0-1$ lemma na dokázání funkce bitonického třídění:

1. Nejprve ukažte, že pro každé sudé n existuje separátor S_n konstantní hloubky s $O(n)$ separátory, který korektně separuje nula-jedničkové bitonické vstupy.
2. Potom ukažte, že pro libovolné 2^k existuje třidička B_n hloubky $O(\log n)$ s $O(n \log n)$ komparátory, která používá separátory a korektně třídí $0-1$ posloupnosti.

3. Nakonec popište, jak udělat z bitonické třídičky třídičku pro obecné $0 - 1$ posloupnosti.