6. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

paralelizace

Příklad první Vymyslete deterministický paralelní (NC) algoritmus, který pro graf $G = (V, E)$ a danou množinu $X \subseteq V$ rozhodne v čase $O(\log |E|)$ a s $O(|E|)$ procesory, jestli X je do inkluze maximální nezávislá množina.

Příklad druhý Definujme *do inkluze maximální párování* v grafu jako takové párování, do kterého už nejde doplnit žádná hrana (bez mazání).

Navrhněte randomizovaný NC algoritmus, který najde do inkluze maximální párování v grafu.

Příklad třetí Navrhněte randomizovaný paralelní algoritmus, který vygeneruje uniformně náhodnou permutaci s n prvky. Konkrétně vymyslete algoritmus typu „Las Vegas“ – algoritmus se nesmí splést a jeho doba běhu je polylogaritmická ve střední hodnotě.

Tip: Mějme náhodné zobrazení $f : X \to Y$. Jak velké musí být Y, aby s velkou pravděpodobností bylo zobrazení prosté?

Zbytek cvičení se budeme zabývat tím, proč Lexikograficky první maximální nezávislá množina nejspíš nepůjde paralelizovat.

D(Třída NC**):** Řekneme, že problém jde vyřešit ve složitostní třídě NC, pokud má vstup délky n a my ho umíme vyřešit s n^k procesory v $O(\log n^c)$ čase, kde k a c jsou konstanty.

Co budeme předpokládat, že je v NC:

- Sčítání a další numerické operace n čísel;
- Setřídění n čísel;
- Násobení dvou matic velikosti $n \times n$, mocnění jedné matice.

D(P-úplnost**):** Řekneme, že problém H je P-úplný, pokud každý vstup I každého problému X v P umíme převést na vstup J problému H. Aby převod dával smysl, požadujeme, aby převod vstupu I na vstup J byl v NC.

Příklad čtvrtý Dokažte, že mám-li čtvercovou matici A, tak „skoro-mocnění“, tj. vytvoření matice B následujícím vzorcem, je v NC:

$$B_{i,j} = \max_{k=1,\dots,n} (A_{i,k} + A_{k,j})$$

Příklad pátý Použijte „skoro-mocnění“ výše k tomu, abyste ukázali, že vytvoření topologického uspořádání zaručeně acyklického orientovaného grafu $\vec{G}$ jde vytvořit nejen v P, ale i v NC.

D: Rozhodovací problém Vyhodnocení obvodu vypadá takto: na vstupu máte hradlový obvod O (hradla mají vstupy velikosti 2 a výstupy velikosti 1), který přijímá n bitů vstupu a vrátí 1 bit výstupu. Na vstupu máte také jeden konkrétní vstup I a bit X a musíte rozhodnout, jestli $O(I) = X$ nebo nikoli.

Tento problém je P-úplný, a to i pro případ, že všechny hradla jsou NOR. Když jsou všechna hradla NOR, nazveme problém jako Vyhodnocení NOR obvodu.

Příklad šestý Finále! Dokažte, že Vyhodnocení NOR obvodu je v NC převoditelné na problém Lexikograficky první maximální nezávislá množina.

Tip: Jak asi čekáte, k vytvoření lexikografického pořadí na vrcholech se využije topologické třídění.