10. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Primárně-duální algoritmy

D: Mějme optimalizační problém a označme OPT hodnotu účelové funkce pro optimální řešení. Řekneme, že algoritmus A je *k-aproximační* pro daný problém, pokud A vrací přípustné řešení a hodnota účelové funkce tohoto řešení je $A \leq k \cdot OPT$ (to v případě, že maximalizujeme, pro minimalizaci chceme $OPT \leq k \cdot A$).

Pozorování: Pro každé řešení maximalizačního ILP a jeho LP relaxace platí, že $OPT_{LP} \geq OPT_{ILP}$, resp. $OPT_{LP} \leq OPT_{ILP}$ pro minimalizaci.

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volností* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' rozumíme hodnotu $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x', y'). Pak platí následující věta:

Dvojice (x', y') je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

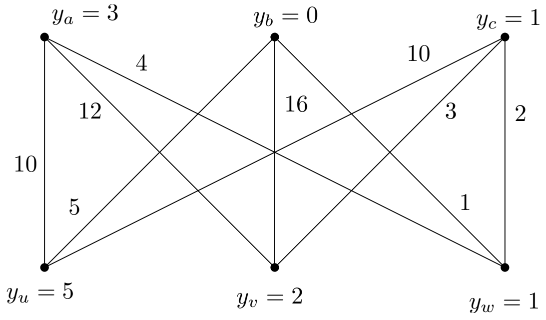
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x'_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\colon s_j^{(P)} \cdot y'_j = 0. \tag{2}$$

D: Pro graf $G = (V, E)$ se dvěma význačnými vrcholy s, t míníme *s, t-řezem* jakoukoli podmnožinu $S \subseteq V, s \in S, t \notin S$.

Příklad první   Na začátku cvičení jste viděli 2-aproximační algoritmus pro Vážené vrcholové pokrytí, ve kterém se vygenerovala dvojice přípustných řešení (x, y). Tato dvojice přípustných řešení většinou nebude optimální, protože to je jen 2-aproximace. Zdůvodněte, které podmínky věty o komplementaritě budou porušeny.

Příklad druhý   Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Příklad třetí Zformulujte hledání nejkratší cesty z bodu s do bodu t v grafu ohodnoceném nezápornými délkami cest jako $\{0,1\}$-celočíselný program. Mějte podmínku pro každý s,t-řez v grafu. Až najdete tento program, tak jej zdualizujte.

Příklad čtvrtý Uvažte následující algoritmus:

1. $\vec{y} \leftarrow 0$, kde y je vektor duálních proměnných.
2. $F \leftarrow \emptyset$ – nepřípustné řešení primálu.
3. Dokud neexistuje s,t-cesta v $G[F]$:
4. Uvažme (jedinou) souvislou komponentu C v grafu $G[F]$ obsahující s.
5. Zvyšujte hodnotu y_C, dokud nějaká podmínka (odpovídající e) nebude těsná.
6. Přidejte e do F.
7. Pro každé $e \in F$:
8. Pokud $G[F \setminus \{e\}]$ obsahuje s,t-cestu, tak odeber e z F.
9. Vrať F jako nejkratší s,t-cestu

Dokažte, že tento algoritmus najde nejkratší cestu.

Příklad pátý Minimum Steiner Forest (dále MSF) je následující problém: Máte neorientovaný graf $G = (V, E)$ s kladnými váhami na hranách $w : E \to \mathbb{R}^+$ a disjunktní množiny $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset V$. Vaším úkolem je najít $F \subseteq E$ minimální váhy takovou, že každé dva vrcholy $u, v \in S_i$ (pro každé i) náleží do téže komponenty souvislosti $G[F]$. Zjevně F je acyklická a nazývá se Steiner Forest.

Formulujte MSF jako úlohu celočíselného programování, proveďte LP relaxaci této úlohy, nalezněte její duál a vypište primární a duální podmínky z věty o komplementaritě.

Příklad šestý Zkonstruujte primárně-duální algoritmus pro MSF.
Hint: Algoritmus bude analogický algoritmu pro nejkratší cestu.
Na doma: Rozmyslete si, že je to 2-aproximace.