9. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volností* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' rozumíme hodnotu $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x', y'). Pak platí následující věta:

Dvojice (x', y') je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \tag{2}$$

Příklad první

(Rozvička z minula.) Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x;\ Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?

Tip: Celočíselnost mnohostěnu (to, že má všechny vrcholy s celočíselnými souřadnicemi) ověřujte až nakonec.

Příklad druhý

Josef K. opsal od souseda při písemce z Optimalizací přípustné řešení primálu a zadaní duálu.

Duál je:

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Přípustným řešením primálu je: $y = (4, 0, -1)$. Úloha se však ptala na to, je-li řešení primálu optimem nebo ne. Dořešte úlohu za Josefa.

Příklad třetí

Pepička K. opsala od souseda při písemce z Optimalizací primál a optimální řešení duálu. Primálem je:

$$\begin{aligned}
\min 10x_1 - 4x_2 & \\
x_1 + 0.6x_3 + 4x_4 &\geq 43 \\
x_1 - x_2 + 0.6x_3 + 10x_4 &\geq 27 \\
x_1 - x_2 - 0.4x_3 - x_4 &\geq 24 \\
x_1 - x_2 - 0.4x_3 - 2x_4 &\geq 22 \\
x_1 + 3.6x_3 - 3x_4 &\geq 56 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Optimálním řešením duálu je $y = (3.36, 0, 0, 6.48, 0.16)$. Úloha se však ptala na optimální řešení původního programu. Dořešte úlohu za Pepičku s použitím komplementarity.

Příklad čtvrtý Přeformulujte větu o komplementaritě, pokud na vstupu nejsou lineární programy ve tvaru (P) a (D), ale LP ve tvaru

$$\begin{aligned}
\max c^T x & \\
Ax &= b \\
x &\geq 0
\end{aligned}$$

a jeho duál. (V jakém bude tvaru?)

Doplňující otázka: Říká tato věta něco o simplexovém algoritmu?

Příklad pátý Pro LP a jeho duál z třetího příkladu nalezněte dvojici vektorů x a y takové, že platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \tag{2}$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.