4. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny a jejich vlastnosti

Příklady naleznete na zadní straně.

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina atd.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x | Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

Poznámka: V tomto předmětu se jinými mnohostěny zabývat nebudeme, takže konvexním mnohostěnům budeme zkráceně říkat jen *mnohostěny*.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0. *Hrana* P je stěnou dimenze 1. Nakonec *faseta* P je stěnou dimenze $d-1$.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

T(Vrcholový popis konv. mnohostěnů**):** Každý omezený konvexní mnohostěn je roven konvexnímu obalu všech svých vrcholů. Omezené mnohostěny tedy můžeme popsat buď pomocí všech poloprostorů (pak počítáme jejich průnik) nebo pomocí všech vrcholů (pak počítáme jejich konvexní obal).

D: *Bazické řešení* je takové řešení soustavy $Ax \leq b$, které odpovídá regulární podmatici A' matice A.

Tedy hodnotu proměnných, které nejsou zastoupeny v A' nastavím na 0.

T(Bázická řešení jsou právě vrcholy konvexního mnohostěnu**):**

Bod x_i je vrcholem konvexního mnohostěnu daného soustavou $Ax \leq b$ dimenze $d \Leftrightarrow x_i$ je bazické řešení soustavy $Ax \leq b$.

Tedy: Bod x_i patří do mnohostěnu (splňuje všechny nerovnice) a zároveň splňuje d lineárně nezávislých nerovností přesně (s rovností).

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\operatorname{conv}(0, (0,0,\ldots,0,1), (0,0,\ldots,1,0), \ldots, (1,0,\ldots,0,0))$$

Příklad první **Dvě konvexní vlastnosti:**

- Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n} \in \mathbb{R}^d$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tak potom i libovolná konvexní kombinace bodů splňuje ta samá omezení, čili $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ platí, že:
$$\vec{a_i}^T \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x_j} \right) \leq b_i.$$
- Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n} \in \mathbb{R}^d$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1,\ 2, \dots, n\}$, tak potom ty samé body splňují i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ platí, že:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{a_k} \right)^T \cdot \vec{x_j} \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k.$$

Tip: Všimněte si rozdílu v zadání těchto příkladů! Dále, dokazujte obě tvrzení pro co nejmenší množinu objektů, tj. první tvrzení pro jedno omezení a druhé tvrzení pro jeden bod.

Příklad druhý Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného LP zadaného například takto:
$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$$
je konvexní množina.

Příklad třetí **Vlastnosti polytopů:**

- Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.
- Dokažte, že každá stěna *omezeného* mnohostěnu je konvexním obalem podmnožiny jeho vrcholů. Ukažte také, že bez slova „omezeného“ tvrzení neplatí.
- Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.
- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.

Příklad čtvrtý Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1, 1, 1, 1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:
$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & -12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Příklad pátý Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d+1$ vrcholů a alespoň $d+1$ faset.

Příklad šestý Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného takto:
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$