

2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Formulace LPček a IPček

PŘÍKLAD PRVNÍ S pomocí znalostí z přednášky rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- Každá úloha LP (polynomiální velikosti) je řešitelná v polynomiálním čase.
- Každá úloha IP (polynomiální velikosti) je NP-těžká.
- Každou úlohu LP můžeme převést na ekvivalentní tvar, který v podmínkách obsahuje pouze rovnosti.
- Pokud úloha LP nemá maximalizační klauzuli, jde ji převést na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

PŘÍKLAD DRUHÝ Pro každý zadaný problém navrhnete lineární nebo celočíselný program, který jej řeší. (Pokud přijdete na lineární program, je to určitě lepší, ale nejde to vždy.)

- (Dopravní problém jinak.) V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i -tá pekárna upeče p_i rohlíků a j -tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i -té pekárny do j -tého obchodu stojí c_{ij} korun.
Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i -tá pekárna zásobuje j -tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij} . Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i -tá pekárna zásobuje j -tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij} .
Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.
- (Prokládání přímkou.) Máme n bodů v rovině. Najděte přímkou (resp. souřadnice přímkou), která minimalizuje sumu vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímkou. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y .
Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímkou není kolmá na osu x .
- (Nejkratší cesta.) Pro zadaný neohodnocený orientovaný graf G a dva vyznačené vrcholy s, t navrhnete lineární program, který spočítá délku nejkratší cesty z s do t .

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme zadanou matici A , vektor b a lineární funkci f . Z nich můžeme postavit třeba tento celočíselný program C :

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

Můžeme z nich ale postavit také následující lineární program L :

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in [0, 1]^n \end{aligned}$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné. Pojmenujme jedno optimální řešení celočíselného programu x_C^* a jedno optimální řešení lineárního programu x_L^* . Dokažte, že platí následující nerovnost:

$$c^T x_C^* \leq c^T x_L^*.$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ NP-těžký problém VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ je zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G s nezápornými reálnými vahami na vrcholech, zadaných funkcí $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Cíl: Najít podmnožinu vrcholů S takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v S (říkáme, že vrchol *pokryje* tuto hranu, odtud vrcholové pokrytí).

Ze všech takových podmnožin S hledáme tu, která má *nejmenší váhu*, čili nejmenší součet $\sum_{s \in S} w(s)$. Navrhněte celočíselný program s proměnnými $x \in \{0, 1\}$, který najde optimální řešení problému VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ.

PŘÍKLAD PÁTÝ Minule jsme na cvičení ukazovali 2-aproximaci neváženého vrcholového pokrytí. Zkuste vymyslet, jak využít předchozích dvou příkladů k tomu, abychom našli 2-aproximaci problému VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

PŘÍKLAD SEDMÝ

1. Naleznete matici $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se všemi čísly mezi $[-10, 10]$ takovou, že Gaussova eliminace (převod na trojúhelníkovou matici) v nějakém kroku nebo na konci vytvoří číslo velké exponenciálně, čili $\Omega(2^n)$.
2. Mejmte celočíselnou matici $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se všemi čísly v intervalu $[-k, k]$. Zkuste vymyslet odhad na velikost dvojkového zápisu determinantu matice B . Je velikost zápisu tohoto čísla v dvojkové soustavě polynom, nebo exponenciela v n ?
3. *Z přednášky:* Navrhněte, jak lze zajistit, aby Gaussova eliminace byla opravdu polynomiální tedy i ve velikosti čísel na vstupu.