PŘÍKLADY Z MATROIDŮ

namísto účasti na cvičení

Pokud nemáte aktivní účast na cvičeních (rozumějte: nikdy jste na něm nebyli), vyřešte prosím všechny příklady a pošlete mi emailem jejich řešení ve formátu PDF. Pokud budete mít dotazy k zadání, nebojte se napsat. Přestože se každý příklad dnes dá dohledat na internetu, prosím vás, aby řešení byla primárně z vaší hlavy.

Příklady jsou vybrané z cvičení a může být užitečné se podívat i na ostatní příklady z daného cvičení.

Příklad první

Mejme matroid M. Zname take *uzaver mnoziny*, tak si muzeme snadno definovat uzavrene a otevrene mnoziny: mnozina je uzavrena, pokud $cl(X) = X$, a mnozina je otevrena, pokud jeji doplnek je uzavreny. Otazka zni: dostali jsme takto topologii? Dokazte nebo vyvratte.

Axiomy topologie:

1. $\emptyset, E$ (cela nosna mnozina) jsou otevrene.
2. Sjednoceni libovolneho poctu otevrenych mnozin je otevrena mnozina.
3. Prunik konecne mnoha otevrenych mnozin je otevrena mnozina.

Příklad druhý

Mějme dva matroidy M_1, M_2 na disjunktních nosných množinách. Definujme si *direktní součet* M_1 s M_2 takto: $\mathcal{I}(M_1 \oplus M_2) \equiv \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}(M_1), I_2 \in \mathcal{I}(M_2)\}$.

- Dokažte, že direktní součet je znovu matroid.
- Je direktní součet dvou matroidů na *nedisjunktních* nosných množinách stále matroid?
- Popište kružnice, báze matroidu $M_1 \oplus M_2$.
- Popište, jak vypadá direktní součet dvou grafů, dvou vektorových matroidů.
- (Náš cíl.) Jak vypadá duál $(M_1 \oplus M_2)^*$? Dá se popsat pomocí M_1^*, M_2^*?

Příklad třetí

- Nejprve rozcvicka: jaka je nutna a postacujici podminka pro hranu e v matroidu M, aby platilo $M/e = M \setminus e$?
- Dokazte, ze pokud $\{f, g, e\}$ je jak kruznice, tak kokruznice v M, tak plati $M/f \setminus g = M/g \setminus f$.

Příklad čtvrtý

Uvazme matici R_{10} o deseti sloupcich, zapsanou nize:

$$R_{10} = I_5 | \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zodpovezte nasledujici otazky:

- Jaky je dual matroidu R_{10}?
- Je matroid R_{10} grafovy?
- Je determinant kazde ctvercove submatice roven $\{-1, 0, 1\}$?
- Da se prava 5×5 cast matice R_{10} doplnit minusky tak, aby uz predchozi bod platil?

Příklad pátý

Prostor cyklu V_c je vektorovy prostor v Z_2^m takovy, ze obsahuje kazdy *sudy* podgraf, cili podgraf se vsemi sudymi stupni. Da se snadno nahlednout, ze baze tohoto prostoru je mnozina kruznic. Prostor rezu je pak vektorovy prostor ortogonalni na V_c, rovnez nad Z_2^m.

Pojdme si tedy dokazat, ze to v matroidech opravdu sedi:

Necht $A = [I_r|D]$ je binarni matroid (resp. nejaka jeho reprezentace) ranku r s nosnou mnozinou velikosti m. Zadefinujme *prostor kruznic* $V_{\mathcal{C}}$ matroidu A jako vektorovy prostor nad Z_2^m takovy, ze jeho baze je mnozina kruznic A. Dokazte, ze prostor kokruznic A je prostor ortogonalni k $V_{\mathcal{C}}$ a je dimenze r.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte, že algoritmická verze MATROID INTERSECTION pro 3 matroidy najednou je NP-těžký problém.

PŘÍKLAD SEDMÝ Z přednášky známe velkou větu „Matroid intersection theorem“, takže vás možná napadlo, jestli existuje „Matroid union theorem“. Opravdu existuje a jeho formulace hovoří o matroidu, který jsme viděli již v předchozích cvičeních, a to je nedisjunktni sjednocení dvou matroidů.

Dokážte tedy následující větu:

Mějme $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ a $M_2 = (E_1, \mathcal{I}_2)$ matroidy ($E_1 \cap E_2$ může být neprázdný). Vytvořme $M = (E_1 \cup E_2, \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\})$. Pak M je matroid a jeho ranková funkce pro $U \subseteq E_1 \cup E_2$ lze spočítat jako:

$$r(U) = \min_{T \subseteq U} \left(|U \setminus T| + r_1(T \cap E_1) + r_2(T \cap E_2) \right).$$