4. CVIČENÍ Z MATROIDŮ

Důkazy eliminací

Předpříklad: Mějme kružnici C v matroidu M, proveďme minorovou operaci M/e pro jednu hranu $e \notin C$, co není smyčka ani kosmyčka. Dokážeme, že množina C uvnitř M/e se nemůže skládat z disjunktního sjednocení $C = C' + I$ pro C' kružnici v M/e a I nezávislou v M/e.

PŘÍKLAD PRVNÍ Dokažte, že pokud C je kružnice v M a $e \notin C$, tak C jako množina uvnitř M/e není disjunktní sjednocení tří a více kružnic.

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokážte variantu eliminačního lemmatu pro kružnice, zvaného *strong circuit elimination*:

Mějme kružnice C_1, C_2 a vyberme si elementy $p \in C_1 \cap C_2$ a $z \in C_1 \setminus C_2$. Pak existuje C_3 taková, že $z \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - p$.

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte charakterizaci kružnic v kontrahovaném minoru, kterou jsme minule nestihli:

C' je kružnicí v M/T, právě když C' je libovolný $\subseteq$-minimální prvek z $\{C \setminus T | C \in \mathcal{C}(M)\}$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Následující induktivní zesílení (C3) skoro platí, ale opravdu jen skoro. Zkuste ho vyvrátit.

Máme $C \in \mathcal{C}$, mějme také $X \subseteq C$ a pro každý element $x \in X$ jednu příslušnou kružnici $C_x \in \mathcal{C}, C \neq C_x$. Po C_x požadujeme, aby $x \in C_x$ a také, aby $x \notin C_y$ pro $y \neq x$. Pak platí, že $\exists C' \in \mathcal{C}$ $C' \subseteq (C \cup \bigcup_x C_x) \setminus X$.

PŘÍKLAD PÁTÝ *Eliminační finále:* Dokažte tranzitivnost relace „být na společně kružnici“ pro matroidy.

Čili: Nechť $x, y \in C_1$, $y, z \in C_2$, pak existuje C_3 taková, že $x, z \in C_3$.

Nápověda: Postupujte indukcí třeba podle $n = |C_2 \setminus C_1|$. Bude se hodit silná eliminace.