10. A 11. CVIČENÍ Z ADS 2, PÁTEK 12:20, ZS 23/24

Převádíme jeden problém na druhý aneb jak ukázat, že problém (nejspíš) nejde řešit efektivně

1. *Vyřešit rozhodovací problémy stačí.* Ukažte, že pokud umíme efektivně vyřešit rozhodovací problém, řešení najdeme také efektivně a to i optimální (v polynomiálním čase). Konkrétně:

a) Máte černou skříňku, která říká, jestli má daná formule splňující ohodnocení. Jak nějaké takové splňující ohodnocení naleznete? Černou skříňku můžete použít vícekrát.
b) Máte algoritmus pro problém Nezávislá množina, tj. černou skřínku, která na vstup (G, k) odpoví, jestli graf G obsahuje nezávislou množinu velikosti k. Jak pomocí polynomiálně mnoha volání tohoto algoritmu nalezneme největší nezávislou množinu v grafu?

2. *Převody.* Na druhé straně najdete část z nejznámějších těžkých (konkrétně NP-úplných) problémů, můžete si vyzkoušet převádět je mezi sebou, což je $n \cdot (n-1)$ různých převodů (některé jsou snadné, jiné těžší). Pár tipů, co vyzkoušet:

a) Vrcholové pokrytí $\leftrightarrow$ Nezávislá množina (nebo Klika) — tedy oběma směry
b) k-barevnost na SAT
c) Součet podmnožiny $\leftrightarrow$ Dva loupežníci
d) Součet podmnožiny na Batoh
e) 3D-párování na 0/1 lineární rovnice.
f) 3D-párování na SAT.
g) Bonus: 0/1 lineární rovnice na Součet podmnožiny. Hint: násobení matice binárním vektorem x odpovídá součtu sloupců.
h) Bonus: 3-SAT na 3-barevnost (o hint si můžete říct)

3. *Lehké (ale netriviální) problémy:* Ukažte, že v polynomiálním čase umíme řešit následující problémy:

a) Lze graf G obarvit dvěma barvami (2-barevnost)?
b) Je formule v DNF splnitelná?
c) Existuje v grafu G klika velikosti 42 (Klika konstantní velikosti)?
d) 2-SAT: splnitelnost formule v CNF, kde každá klauzule obsahuje max. 2 literály

Katalog NP-úplných problémů

V nabídce máme tisíce ~~produktů~~ problémů, zde jsou jedny z nejoblíbenějších:

- *Logické problémy:*
  - SAT: splnitelnost logických formulí v CNF
  - 3-SAT: každá klauzule obsahuje max. 3 literály
  - 3,3-SAT: navíc se každá proměnná vyskytuje nejvýše třikrát
  - SAT PRO OBECNÉ FORMULE: nejen v CNF.
  - OBVODOVÝ SAT: splnitelnost booleovského obvodu.
- *Grafové problémy:*
  - NEZÁVISLÁ MNOŽINA: existuje nezávislá množina na k vrcholech?
  - KLIKA: existuje úplný podgraf na k vrcholech?
  - VRCHOLOVÉ POKRYTÍ: existuje množina U o k vrcholech taková, že každá hrana má alespoň jeden vrchol v U?
  - k-BAREVNOST: lze obarvit vrcholy k barvami (přidělit každému vrcholu číslo od 1 do k) tak, aby vrcholy stejné barvy nebyly nikdy spojeny hranou)? To je NP-úplné už pro $k = 3$.
  - HAMILTONOVSKÁ CESTA: existuje cesta obsahující všechny vrcholy?
  - HAMILTONOVSKÁ uv-CESTA: existuje cesta mezi u a v, která obsahuje všechny vrcholy grafu?
  - HAMILTONOVSKÁ KRUŽNICE: existuje kružnice obsahující všechny vrcholy?
  - PROBLÉM OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO: hrany jsou ohodnoceny délkami $\ell(e) \geq 0$, existuje hamiltonovská kružnice délky nejvýše k?
  - 3D-PÁROVÁNÍ: máme tři množiny se zadanými trojicemi; zjistěte, zda existuje taková množina disjunktních trojic, ve které jsou všechny prvky právě jednou? (Zde se nejedná o graf, ale 3-uniformní hypergraf.)
- *Číselné problémy:*
  - SOUČET PODMNOŽINY: má daná množina přirozených čísel podmnožinu s daným součtem?
  - BATOH: jsou dány předměty s váhami a cenami a kapacita batohu, existuje podmnožina předmětů ceny alespoň C, jejíž váha nepřesáhne kapacitu batohu?
  - DVA LOUPEŽNÍCI: lze rozdělit danou množinu čísel na dvě podmnožiny se stejným součtem?
  - 0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE: je dána matice $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{m \times n}$. Existuje vektor $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ takový, že $\mathbf{Ax}$ je rovno vektoru samých jedniček?