8. CVIČENÍ Z ADS 2, PÁTEK 12:20, ZS 23/24

Booleovské/hradlové obvody a třídicí/komparátorové sítě

1. *Maximum:* Navrhněte komparátorovou síť pro hledání maxima: dostane-li n prvků, vydá nějakou permutaci prvků, v níž bude poslední hodnota největší (a ostatní seřazené libovolně).

2. *Maximum zespoda:* Ukažte, že na určení maxima z n čísel potřebujete aspoň $\Omega(\log n)$ hladin komparátorů a $\Omega(n)$ komparátorů.

3. *Komparátor:* Sestrojte hradlovou síť hloubky $O(\log n)$, která porovná dvě n-bitová čísla x a y a vydá jedničku, pokud $x < y$.

4. *AND OR NOT:* Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci s k vstupy (zadanou tabulkou) lze vyjádřit pomocí hradel AND, OR a NOT. Jakou má obvod hloubku a kolik potřebujeme hradel?

(Malý bonus: použijte jen hradlo NAND, které počítá ze dvou vstupů negaci funkce AND. Stačí ukázat, že ostatní hradla lze sestrojit z NANDů. Jakou jiné booleovské hradlo se dvěma vstupy by se dalo použít?)

5. *Převod na booleovskou abecedu {0, 1}:* Ukažte, jak hradlovou síť s libovolnou (konstantně velkou) abecedou přeložit na ekvivalentní booleovský obvod s nejvýše konstantním zpomalením. Abecedu zakódujte binárně, hradla simulujte booleovskými obvody. (Takto se dá předělat na booleovský obvod sčítačka, která na přednášce potřebovala abecedu velikosti 3.)

6. *Nejvyšší bit:* Sestrojte hradlovou síť hloubky $\mathcal{O}(\log n)$ a velikosti $\mathcal{O}(n)$, která ve vstupní posloupnosti vynuluje všechny bity krom nejlevější jedničky, tj. například pro vstup 00110110 vydá na výstupu 00100000.

7. *Složité funkce:* Dokažte, že pro žádné $c > 0$ neplatí, že všechny k-vstupové booleovské funkce lze spočítat obvody s $\mathcal{O}(k^c)$ hradly. Hint: kolik je booleovských funkcí a kolik je obvodů s $\mathcal{O}(k^c)$ hradly?

(Další bonusové úlohy na vyžádání u Vašeho cvičícího.)